

Q  
23



AGB

Q23



Geschenk für die Gymnasialbibliothek  
meines Herrn Vorfatters.

A 23









Elemente  
der  
physikalischen Mechanik

für  
Gymnasien



von  
Dr. Theodor Hoh

Gymnasial - Professor der Mathematik und Physik in Bamberg.

*Mit 50 Originalholzschnitten.*

Leipzig

Verlag von Otto Wigand.

1861.



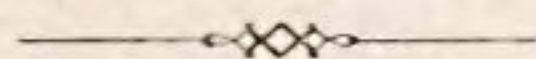




Elemente

der

**physikalischen Mechanik.**









Elemente

Q 23

der

physikalischen Mechanik

für

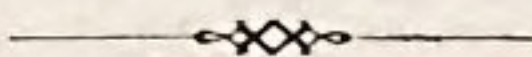
Gymnasien



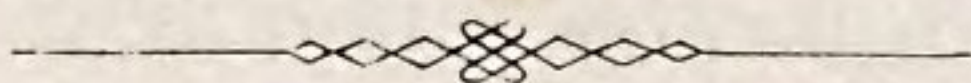
von

Dr. Theodor Hoh

Gymnasial-Professor der Mathematik und Physik in Bamberg.



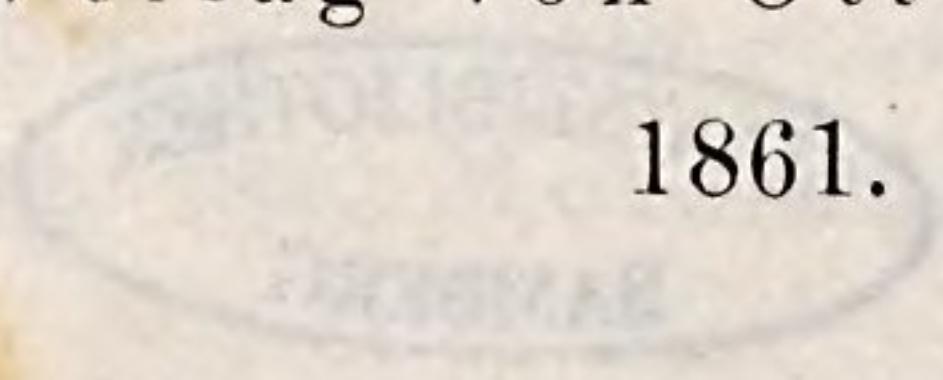
*Mit 50 Originalholzschnitten.*



Leipzig

Verlag von Otto Wigand.

1861.





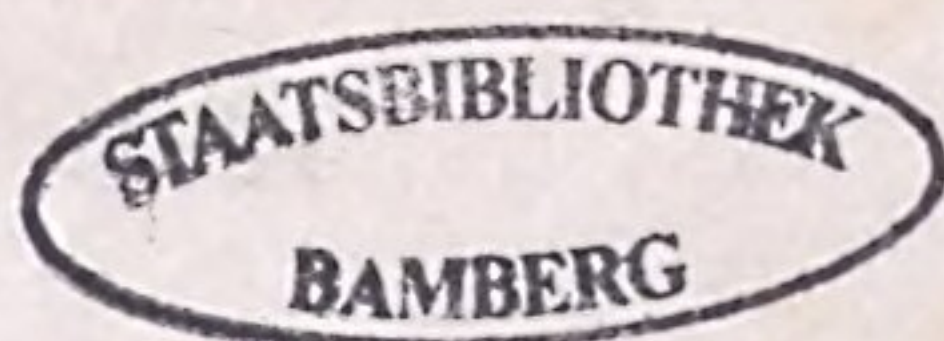
22

Elemente

physikalischen Mechanik



Dr. Theodor Höp





## Vorwort.

Das an unsren Gymnasien betriebene Studium der mechanischen Naturlehre hat einen doppelten Zweck zu erfüllen, einmal zur formalen Geistesbildung jenen wesentlichen Beitrag zu liefern, welchen das aus der Naturwissenschaft geschöpfte Bewusstsein einer überall verbreiteten Ordnung und der Einheit und Beständigkeit des Gesetzes in der Fülle und Flucht der Erscheinungen gewährt, dann dem Jüngling die Vorkenntnisse zu geben, auf deren Grund ihm auf höheren Lehranstalten die Naturforschung verständlich und fruchtbringend wird. Hierzu ist nöthig, dass das klare und gediegene Element der mathematischen Methode hervorgehoben, des Zusammenhanges der natürlichen Thatsachen gedacht, und ihre Beziehung zu besondren Untersuchungen und lebendigen Anwendungen angedeutet werde. Nur ein kleiner Theil der Naturerkenntniss ist bis jetzt einer diesen Absichten entsprechenden Behandlung fähig, in einem andern ist wenigstens die Möglichkeit dazu ausser Zweifel gesetzt, ein dritter entzieht sich ihr vielleicht auf immer. Die erste Abtheilung, die eigentliche Mechanik, musste ausführlicher behandelt werden, jedoch weder in der höhere mathematische Bildung verlangenden abstrakten Weise, noch in empirisch praktischer, sondern in jener die unabhängige rationelle Entwicklung betonenden, aber auch an die Erfahrung und das Bedürfniss anknüpfenden Darstellung, welche zur Erregung und Bethätigung der geistigen Kräfte die Phantasie — im kälteren Sinne der Wissenschaft — und den praktischen Verstand nicht verschmäht. Im zweiten Gebiet, welches einst aus einer noch nicht ganz geklärten und fragmentarischen Behandlung der Molekularbewegungen und



Aetherschwingungen zu einer mechanischen Theorie der Chemie und Imponderabilien heranreifen wird, genügten kurze Andeutungen, in das dritte, das geheimnissvolle Reich der organischen Vorgänge waren kaum gelegentliche Ausflüge gestattet. Ob zu viel oder zu wenig des angedeuteten Stoffes beigezogen sei, dürfte, falls nur der Entwicklungsgang im Ganzen kein missglückter ist, wenig bedeuten, weil bei dem der Lehrerindividualität offen zu lassenden Spielraum an den einer abweichenden Anschauung unterliegenden Stellen Weglassungen und Erweiterungen im einzelnen Belieben stehen. Die Beispiele geben dem Schüler nur einige Auflösungsmuster besondrer Anwendungen allgemeiner Gesetze und müssen vielfach variirt und vermehrt werden. Zeichnungen sind möglichst sparsam angebracht und immer schematisch gehalten, weil es nur auf Einsicht in das Wesen der fraglichen Thatsachen ankommt, dem Lehrer Tafel und Kreide Gelegenheit zu selbständiger Erläuterung geben und einfache Apparate nirgend fehlen sollten. Von Mängeln meines Werkes, welches vielleicht eine ernste Beurtheilung findet, hoffe ich, dass sie wenigstens nicht so störend sind, um die Entwicklungsfähigkeit desselben zum Besseren läugnen zu dürfen.

**Theodor Hoh.**



# Inhalt.

## Einleitung.

Aufgabe und Stoff der Mechanik. — Allgemeine Eigenschaften der Materie. — Kraft. — Maasseinheiten und Eintheilungen. Seite 1—6.

## I. Bewegung und Ruhe.

Ortsveränderung. — Innere und äussere Ursache der Bewegung. — Absolute und relative Bewegung und Ruhe. — Geschwindigkeit. — Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung. — Endgeschwindigkeit. — Masse des bewegten Körpers. — Bewegungsgrösse. Seite 7—11.

## II. Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte.

Angriffspunkt. — Gleiche und entgegengesetzte Krafrichtungen. — Kraftparallelogramm. — Mittelkraft und Seitenkräfte. — Kraftparallelepiped. — Parallelkräfte. — Statische Momente. — Kräftepaar. — Hebel. — Princip der virtuellen Geschwindigkeit. — Physischer Hebel und Hebelsysteme. — Wage. — Rad an der Welle. — Räderwerke. — Rolle und Flaschenzug. — Schiefe Ebene. — Schraube. — Keil. . . . . Seite 11—30.

## III. Die Schwere.

Anziehung. — Gewicht. — Masse. — Dichte. — Schwerpunkt. — Guldin's Lehrsätze. — Unterstützung des Schwerpunktes und Gleichgewicht. — Standfähigkeit. — Fallgesetze. — Fall auf schiefer Ebene. — Senkrecht Steigen. — Wurf-Uebergang in eine andre Bewegungslinie. . . . . Seite 30—48.

## IV. Maass der Kräfte. — Widerstände. — Stoss der Körper.

Arbeitsgrösse. — Krafteinheiten. — Kraftmesser. — Wirkungsfähigkeit und lebendige Kraft. — Cohäsion. — Festigkeit. — Adhäsion. — Reibung. — Steifigkeit der Seile. — Umgebendes Mittel. — Stoss gegen eine feste Wand. — Zusammenstoss beiderseits oder nur einerseits bewegter elastischer und unelastischer Körper. . . Seite 49—70.

## V. Bewegungen um einen Centralpunkt.

Kontinuirliche Einwirkung einer variablen Kraft. — Pendel. — Trägheitsmomente. — Physisches Pendel und dessen Anwendungen. —



Die Beharrung der Schwingungsebene. — Die bei einer Centralbewegung in Betracht kommenden Kräfte. — Rotation. — Beharren der Rotationsachse. . . . . Seite 70—89.

## VI. Die Flüssigkeiten.

Kugelgestalt. — Freie Oberfläche. — Druckhöhe. — Seitendruck. — Auftrieb. — Kommunizirende Röhren. — Archimedisches Princip. — Aräometer. — Spezifisches Gewicht. — Bewegung, Ausströmung und Wirkungsfähigkeit der Flüssigkeiten. — Rückstoss. Seite 89—112.

## VII. Die Gase.

Luftdruck. — Barometer. — Barometrische Höhenmessung. — Mariotte's Gesetz. — Manometer. — Stereometer. — Luftpumpe. — Spezifische Gewichtbestimmung der Gase. — Luftschiffahrt. — Auf der Wechselwirkung zwischen Luftdruck und Flüssigkeiten beruhende Apparate. . . . . Seite 112—135.

## VIII. Wellenbewegungen.

Elementarschwingung und Wellenbewegung. — Schwingung einer beiderseitig befestigten Saite und eines einseitig befestigten Seiles. — Länge, Thal und Berg der Welle. — Stehende Wellen. — Schwingungsknoten in Linien und Ebenen. — Verdichtungs- und Verdünnungswellen. — Mechanischer Effekt der Wellen. — Oscillirende Wellen. — Transmissionswellen. — Interferenz, Beugung, Zurückwerfung der Wellen. — Schall. — Brechung des Schalles. — Dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Intensität. — Echo. — Wesen, Quantität, Qualität, Intensität des Tones. — Musikalische Instrumente. — Schall erzeugende und aufnehmende Werkzeuge des Menschen. . . . . Seite 135—155.

## IX. Molekularbewegungen.

Molekularkräfte. — Atome und Moleküle. — Krystallsysteme. — Chemische Verhältnisse. — Flüssigkeithäutchen. — Kapillarität. — Diffusion der Flüssigkeiten. — Lösung und Imbibition. — Endosmose. — Diffusion der Gase. — Absorption der Gase. — Physikalische Gasanalyse. — Verdichtung der Gase an den Oberflächen. . . . . Seite 156—172.

## X. Aetherbewegungen.

Theorie der Imponderabilien und der Aethervibrationen. — Entstehung, Fortpflanzung, Intensität, Zurückwerfung, Brechung des Lichtes. — Farbenzerstreuung, Doppelbrechung, Polarisation, Interferenz des Lichtes. — Die mit dem Licht analogen Phänomene der Wärme. — Ausdehnung durch die Wärme. — Thermometer. — Aenderung der Aggregatzustände. — Dampfmaschine. — Beziehungen des Magnetismus und der Elektrizität zur Bewegungstheorie. . . . . Seite 172—182.



## Einleitung.

1. Die Mechanik untersucht entweder die Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichts auf rein mathematischem Weg unter Voraussetzung der dieser Methode eigenen idealen Vollkommenheit aller in Betracht kommenden materiellen Punkte, Kräfte und Beziehungen — theoretische, analytische Mechanik —, oder sie wendet ihre Aufmerksamkeit vornehmlich auf die Anwendung der Bewegungsprincipien und auf das erfahrungsmässige Verhalten der zur Betheiligung gezogenen Stoffe — angewandte Mechanik —, oder sie sucht die quantitativen Grundbedingungen aller natürlichen Vorgänge, wenn nicht das Wesen, doch eine wesentliche Wirkungsform der Kräfte, die Veränderungen an und in den Körpern nicht bezüglich ihrer Qualität, aber ihrer Grösse, Form, Ausdehnung, der Geschwindigkeit und Richtung ihrer Bewegung zu erforschen — physikalische Mechanik —. Hier wird beobachtend, versuchend und rechnend verfahren, auch wohl der vortheilhaften Benützung der Naturkräfte und der Einleitung oder Unterhaltung von Bewegungen zu bestimmten Zwecken gedacht, — im Wesentlichen aber handelt es sich um wahre und klare Erkenntniss der wirkenden Natur. Nicht alle Thätigkeiten derselben lassen die mechanische Betrachtungsweise zu, aber überall, wohin sie zu dringen vermochte, wurde Licht verbreitet. Gleich den schärfsten Mitteln der Auflösung und Zertheilung durchdringt ihre mathematische Waffe die dichtesten verwirrtesten Massen natürlicher Dinge und Vorgänge, holt aus dem Dunkel der tiefsten Geheimnisse den Kern der vielfachen schwankenden Thatfachen an's Tageslicht hervor und fesselt ihn in eine dem Bewusstsein verständliche und unverlierbare Formel. Es ist zu hoffen, dass die Bemühungen der Neuzeit, den Theorien des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus, der Electricität, selbst der chemischen Akte vermittels einer ausgebildeten Molekularmechanik jene Sicherheit zu verleihen, welche den Bewegungs- und



Gleichgewichtszuständen der gröberen Materie längst eigen ist, einen Erfolg haben, welcher die physikalische Mechanik zur höheren Bedeutung einer allgemeinen Naturlehre erhebt.

2. Die natürlichen Vorgänge geschehen an den durch gewisse allgemeine Eigenschaften sinnlich erkennbaren Körpern, welche zusammen die materielle Welt bilden. — Die Grundbedingung für deren Dasein ist der Raum. Die drei unendlichen Dimensionen desselben, Länge, Breite, Höhe, kommen auch jedem einzelnen im Raum vorhandenen Körper, jedoch in beschränkter Weise zu. Sofern diese Beschränkung des Raumes in ebener oder krummflächiger Bildung der Grenzen ausgesprochen ist, entsteht die reguläre, symmetrische oder unregelmässige Gestalt des Körpers. — Die endliche begrenzte Ausdehnung gibt die räumliche Stelle und den Umfang des Körpers. In zweiter Linie ist ihm die Raumerfüllung eigen. Es scheint, dass dieselbe selbst da, wo die Sinne durchaus keine Auflockerung oder gar Lücken entdecken, keine vollständige ist, weil unter gewissen Umständen ohne Aenderung des Umfanges andre Stoffe auch in die dichtesten Körper eindringen können. Wahrscheinlich sind die letzten Bestandtheile der Materie unendlich kleine, nach Grösse, Form und Wesen unveränderliche Körperchen — Atome —, welche, zwar für sich undurchdringlich eine vollkommene Raumerfüllung darstellen, aber zum Aufbau jedes Körpers einander nicht bis zu wirklicher Berührung nahtreten, sondern unter dem experimentell nachweisbaren Bestand der im Verhältniss zu ihren eigenen Durchmessern nicht unbeträchtlichen Zwischenräume durch Kräfte zusammengehalten werden, von deren Grösse und Richtung vor Allem die Aggregatzustände abhängen. Ist die atomistische Anziehung sehr stark und besonders in gewissen Richtungen ausgesprochen, so wird einerseits eine bestimmte Anordnung der kleinsten Theile begünstigt, welche sich äusserlich in einer selbständigen, oft sehr regelmässigen Figur kundgibt, anderseits ein merklicher Widerstand gegen äussere auf Trennung oder Formänderung abzielende Eingriffe verbürgt. Ist hiemit der feste Aggregatzustand gegeben, so erscheinen in Flüssigkeiten die Atome in jener regulären, völlig gleiche Abstände lassenden Anordnung, welche das aus dem schwachen Widerstand gegen theilende oder die Gestalt modificirende Einflüsse, sowie aus der Bereitwilligkeit der Masse, sich jedem ihr angebotenen Behälter zu fügen und höchstens eine freie, übrigens auch schwankende Oberfläche zu bilden, zu erschiessende Gleichgewicht in dem Gegeneinander-



wirken der bei der Constitution der flüssigen Materie betheiligten Kräfte ermöglichen. — In den Gasen endlich hat die Anziehung einer Abstossung Platz gemacht, welche vielleicht in den die materiellen Atome umgebenden Aetherhüllen sitzt. — Keiner der Aggregatzustände ist absolut, vielmehr vermögen Wärme und Druck die angedeuteten Beziehungen zwischen den atomistischen Kräften nach beiden Seiten hin zu modificiren. — War der Einfluss beider Agentien nur ein geringer, so wird jedoch der Aggregatzustand nicht nur nicht geändert, sondern der Körper, welchem eine Raumverminderung oder -Vermehrung zugemuthet worden war, kehrt nach Wegfall der äusserlichen Bestimmung auf seinen früheren Umfang zurück. Diese Fähigkeit der Atome, eine ihre gewöhnliche Stellung überschreitende Annäherung oder Entfernung wieder auszugleichen, wird als atomistische Elasticität innerhalb sehr enger Grenzen bei jedem Körper gefunden. — Der Zusammenhalt der Atome zu einem gemeinsamen Körper kann auf mechanische und chemische Weise aufgehoben, und jeder Körper demnach in kleinere Theile zerlegt werden. Ist die Theilbarkeit der Materie in mathematischem Sinn unendlich, so wird sie ihre physische Grenze da finden, wo die grösstmögliche Verschärfung der Sinne nichts Unterscheidbares mehr vorfindet, oder wo die Abschnitte des getheilten Körpers so klein geworden sind wie die atomistischen Poren des theilenden. In chemischen Akten geht die Zertheilung der sich durchdringenden Stoffe nicht selten bis auf die Atome selber herab.

Jeder Körper verharrt in der Lage, in welcher er entstand; die Beibehaltung derselben ist ihm so wesentlich, als seine Ausdehnung und Raumerfüllung. Jeder aber kann bestimmt werden, dieselbe zu verändern. Wir nennen den Anlass dazu eine Kraft, wissen nichts über deren Wesen, und können blos ihre besondere Wirkungsform, Grösse und Richtung beurtheilen.

**3.** Um sich von der Kraftleistung eines besondern Falles, oder von den quantitativen Bedingungen dazu, oder vom unterbreiteten Material eine bestimmte Vorstellung zu machen, gibt man an, wie oft ein gewisses an sich gleichgiltiges, aber im Gang derselben Betrachtung unveränderliches Einheitsmaass der Länge, der Fläche, der Zeit, des Gewichtes u. s. f. in den gegebenen Grössen enthalten sei. Demnach wendet die Mechanik häufig Maassbestimmungen an, deren Grundlagen am besten im voraus zusammenhängend kennen gelernt werden.

Als Einheit des Längenmaasses erfreut sich im



bürgerlichen Leben unsres Vaterlandes und der meisten übrigen Reiche Europa's der F u s s , nach dem Decimalsystem in 10 Zoll und 100 Linien, nach dem Duodecimalsystem in 12 Zoll oder 144 Linien zerfallend, eines allgemeinen Gebrauches, ist aber, wie der sein Urmaass bildende menschliche Körpertheil selbst, je nach der Gegend mit so verschiedenem Werth begabt, dass seine Angaben der namentlich in der Wissenschaft so wünschenswerthen Allgemeinheit völlig entbehren. Man schlug deshalb als constante Längeneinheit die Ausdehnung des Sekundenpendels vor, d.h. eines Pendels, welches innerhalb einer Sekunde eine Schwingung vollendet; vergass aber, dass dessen Länge mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt und der Bodendichte des Beobachtungsortes wechselt. Sicherer glaubte der französische Nationalkonvent zu gehen, als er verordnete, dass das neue Einheitsmaass in einfachem Verhältniss zur Länge des Erdmeridian stehen solle. Die zu diesem Behuf von Delambre und Mechain angestellten, später von Biot und Arago vervollständigten Gradmessungen ergaben den vierten Theil (Quadranten) des elliptischen Erdmeridian (Bogen vom Aequator bis zum Pol) zu 5130074 Toisen. Der zehnmillionste Theil des Erdmeridianquadranten wurde Meter genannt und zur Einheit des Längenmaasses bestimmt. Dasselbe beträgt somit 0,513074 Toisen oder 3 Fuss 11,296 Linien Pariser Maass. Freilich fand sich später, dass der Erdmeridianquadrant nicht 10000000, sondern 10000856 Meter misst, wonach der Meter um  $\frac{1}{25}$  Linie vermehrt werden müsste, wenn ihm seine auf ein einfaches Verhältniss seiner Länge zum Erdumfang gegründete Bedeutung als Naturmaass gewahrt werden sollte. Man entschloss sich aber aus praktischen Gründen hiervon abzusehen. Bezüglich der Abtheilungen nach abwärts steht

$$\begin{array}{rcl}
 1 \text{ metre} & = & 10 \text{ decimetres} \\
 1 & „ & = 10 \text{ centimetres} \\
 1 & „ & = 10 \text{ millimetres,}
 \end{array}$$

und bezüglich der Zusammenfassung nach Oben

$$\begin{array}{rcl}
 10 \text{ metres} & = & 1 \text{ dekam.} \\
 10 & „ & = 1 \text{ hektom.} \\
 10 & „ & = 1 \text{ kilom.} \\
 10 & „ & = 1 \text{ myriam.}
 \end{array}$$

Verglichen mit dem Pariser Fussmaass ist

|              |               |            |               |
|--------------|---------------|------------|---------------|
| 1 myriametre | (10000 metre) | = 30784,44 | Pariser Fuss. |
| 1 kilometre  | (1000 „ )     | = 3078,444 | „             |
| 1 hektometre | (100 „ )      | = 307,8444 | „             |
| 1 metre      |               | = 3,078444 | „             |



1 decimetre (0,1 metre) = 44,32959 Pariser Linien.

1 centimetre (0,01 „) = 4,432959 „

1 millimetre (0,001 „) = 0,4432959 „

Das Verhältniss zu andern Fussmaassen ist in folgenden Zahlen ausgesprochen:

1 bayer. Fuss = 0,291859 metre od. 1 metre = 3,426309 bayr. '

1 bad. „ = 0,3 „ „ 1 „ = 3,333 bad. '

1 rhein. „ = 0,313853 „ „ 1 „ = 3,184 rhein. '

1 wiener „ = 0,316102 „ „ 1 „ = 3,165 wien. '

1 engl. „ = 0,394794 „ „ 1 „ = 2,532 engl. '

10 Fuss geben eine Ruthe, 6 Fuss eine Klafter, 25380' (bayer.) oder 22803,29 par. ' eine deutsche oder geographische Meile, deren 15 auf einen Meridiangrad gehen. — Die Quadrate der genannten Längenmaasse geben die entsprechenden Flächenmaasse.

1 <sup>q</sup>' = 100 <sup>q</sup>''  
1 „ = 100 <sup>q</sup>''' } 40,000 <sup>q</sup>' = 1 Tagwerk.

1 <sup>q</sup>metre = 9,4768 par. <sup>q</sup>' = 11,73959 bayr. <sup>q</sup>'

Im Feldmaass ist gebräuchlich 1 Are = 1 <sup>q</sup>dekametre = 100 <sup>q</sup>metre = 947,6817 par. <sup>q</sup>' = 1173,959 bayr. <sup>q</sup>' und 1 Hektare = 100 Ares = 94768,17 par. <sup>q</sup>' = 117395,9 bayr. <sup>q</sup>' = 2 Tagwerk 37395,9 <sup>q</sup>'.

Für das Körpermaass ist 1 cub. ' = 1000 cub. ''

1 „ = 1000 cub. '''

1000 cub. ' (im Duodecimalmaass 1728 cub. ') = 1 cub. ° (Ruthe).

126 cub. ' (bei 6 ' Höhe, 6 ' Breite, 3 1/2 ' Länge) oder:

108 cub. ' (bei 6 ' Höhe, 6 ' Breite, 3 ' Länge) = 1 Klafter (Holzmaass).

In Frankreich gilt zu letzterem Zweck 1 Stere = 1 cub.-metre = 29,169 par. cub. ' = 40,218 bayr. cub. ', indem 1 bayr. cub. ' 1253,3076 par. cub. '' hält.

1 Cubikdecimeter (0,001 cub.-metre) dient unter dem Namen Litre als Maass für Flüssigkeiten.

1,069 Litre = 1 bayr. Maass, welche 43 bayr. decim.-cub. '' fasst.

1,5 „ = 1 bad. „

1,145 „ = 1 preussisches Quart.

Die Einheit des in der Wissenschaft eingebürgerten neu-französischen Gewichtes wird durch Abwiegen eines Cubikcentimeter (0,000001 Cubikmeter) reinen Wassers im Zustand der grössten Dichte (bei 4° C.) bestimmt und Gramm genannt, deren nahezu 15 auf ein Loth gehen. (In Bayern genauer 17,5.)

1 Gramm = 10 Decigramm

1 „ = 10 Centigramm

1 „ = 10 Milligramm.



Das letztgenannte kleinste aller Gewichte ist der 3750. Theil (0,000267) eines Quentchen ( $\frac{1}{128}$  Pfund) oder, verglichen mit dem Apothekergewicht, dessen Pfund in Bayern sich zum bürgerlichen verhält wie 9 zu 14, in 12 Unzen =  $8 \cdot 12 = 96$  Drachmen =  $3 \cdot 96 = 288$  Skrupel =  $20 \cdot 288 = 5760$  Gran zerfällt, und worin 1 Unze = 1,715 (in runder Zahl 2) Loth = 30,0125 (30) Gramm wiegt — kaum der 62. Theil eines Gran.

10 Gramm = 1 Dekagramm

10 „ = 1 Hektogramm

10 „ = 10 Kilogramm.

Das Kilogramm (1000 gramm, Gewicht von 1000 cub.-cent. = 1 cub.-decim. = 1 litre Wasser, während eine bayerische Maass reinen Wassers ungefähr  $2\frac{1}{2}$  Pfund wiegt) entspricht genau 2 Zollpfunden. Andere Vergleiche sind ein badisches Pfund = 0,5 Kilogramm, 1 preussisches Pfund = 0,467711 K., 1 engl. Pfund = 0,4536005 Kilogramm, 1 altfranzösisches = 0,489506 K.



## I.

### Bewegung und Ruhe.

1. Jede Ortsveränderung eines materiellen Punktes heisst Bewegung. Ein wirklicher Körper, welcher immer aus mehreren materiellen Punkten — physisch betrachtet: Atome — besteht, ändert hiebei entweder im Ganzen seine Stellung zu andren als fest angenommenen Punkten des Raumes, oder das Lagenverhältniss einiger in ihm gelegener Punkte gegen einen ihm selbst eigenthümlichen konstanten Punkt.

2. Die Ursache der Bewegung heisst Kraft, welche erfahrungsgemäss entweder von Aussen den Körper angreift, oder in dessen Innerem ihren Sitz hat.

3. Die allgemeine Eigenschaft der Materie, in dem ihr eigenen Zustand zu verharren, wird hiedurch nicht aufgehoben, sondern in ihrer Aeusserungsform verändert; denn wie in der Ruhe, so ist nun der bewegte Körper auch in der Bewegung beharrlich. Ueberhaupt ist der Begriff der Ruhe oder der als Trägheit bezeichneten thatsächlichen Neigung, in ihr zu verbleiben, so verstanden, dass alle auf den betreffenden Körper wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Ruhe, als völlige Aufhebung aller Thätigkeit, besteht in der Natur nicht, für welche Stillstand Vernichtung wäre. Kein Punkt im Weltall ist je ohne Kraftbethätigung.

4. Von absoluter Ruhe eines Körpers können wir uns nie überzeugen, weil dieselbe immer und in Bezug auf solche Punkte beurtheilt wird, welche wir ohne vollkommene Berechtigung als konstant ansehen.

Auch im Gegenhalt zu der im absoluten Sinn immer ortsverändernden Bewegung sind relative Bewegungen denkbar, während und am Ende deren wegen einer gleichzeitig nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kraft der Körper seine Stelle im Raum beibehält.

5. In der Bewegung verknüpft sich die Vorstellung des Raumes mit derjenigen der Zeit. Der Quotient aus beiden, d. i. der in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Raum, heisst Ge-



schwindigkeit. Meist wird angegeben, wie viel Fuss oder Meilen ein bewegter Körper in der Sekunde durchläuft. Geschwindigkeit der Schnecke 0,005' — der Flüsse von mittlerem Gefäll 3,5' — Flug der Stubenfliege 5' — Fussgänger 5' bis 6' — Wind 10' — Zugpferde mit mittlerer Belastung 12,7' — Dampfschiffe 15' — schnellsegelnde Schiffe 14' bis 22' — Schlittschuhläufer 36' — — englische Rennpferde 41' bis 70' — Stürme 50' bis 56' — Dampfwagen 63' bis 100' — Falke 78' — Windhund 78' — Adler 95' — Orkan 100' bis 150' — Brieftaube 110' — Schwalbe 152' — der Schall 1022,5' — ein Punkt des Erd-Aequator bei der Achsendrehung der Erde 1431,5' — Flintenkugel 1500' — Kanonenkugel (24pfündig) 1586' bis 2300' — Erd-Mittelpunkt in der jährlichen Bewegung um die Sonne 93910' oder fast 4 Meilen — das Licht 42000 Meilen — die Elektrizität in guten Leitern 30000 bis 60000 Meilen in einer Sekunde.

Bezeichnet man den Raum mit  $s$ , die Zeit mit  $t$ , die Geschwindigkeit mit  $c$ , so bestehen folgende mathematische Relationen:

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{t} & s &= ct & t &= \frac{s}{c} \\ s' &= c' t' \\ s : s' &= c t : c' t' \\ c &= c' & s : s' &= t : t' \\ t &= t' & s : s' &= c : c' \\ s &= s' & ct &= c' t' & c : c' &= t' : t \end{aligned}$$

**6.** Die Geschwindigkeit wird gleichförmig, d. h. der bewegte Körper legt in derselben Zeit immer denselben Raum zurück, wenn der einmalige Angriff einer momentanen Kraft die Bewegung verursachte und nichts ihren Fortgang hindert oder beeinträchtigt. — Bei längerer Einwirkung einer kontinuierlichen Kraft wird in jeder folgenden Zeiteinheit ein grösserer Weg gemacht, als in der vorhergehenden — : gleichförmig beschleunigte Bewegung. Widerstände können in jedem Moment etwas von der Bewegung wegnehmen — : gleichförmig verzögerte Bewegung. — Auch ist Beschleunigung und Verzögerung in ungleichförmiger Weise denkbar, kann aber dann nur Gegenstand einer mechanischen Betrachtung sein, sofern in der Ungleichförmigkeit eine gewisse periodische Gesetzmässigkeit nachweisbar ist. — Weil in den letztern Fällen die Zeit dem Raum nicht einfach proportional ist, so lässt sich die Geschwindigkeit nicht durch den Quotienten  $s/t$  ausdrücken; vielmehr giebt es hier für jeden Punkt der Bahn oder jeden Augenblick des Laufes eine sogenannte Endgeschwindigkeit, worunter man den Raum versteht, welchen der bewegte Körper in der nächsten Zeiteinheit zurücklegen



würde, wenn er von jetzt der beschleunigenden Kraft entzogen bloß vermöge seiner Beharrlichkeit weiterginge. Weil in jeder Zeiteinheit ein neuer Anstoss von der kontinuierlichen Kraft erfolgt, demnach dem Körper eine um so grössere Geschwindigkeit verbleiben kann, je länger er dem beschleunigenden Einfluss ausgesetzt war, so ist die Endgeschwindigkeit der Zeit proportional und hat, wenn sie am Ende der ersten Sekunde  $g$  heisst, nach  $t$  Secunden den Werth  $gt$ .

7. Haben wir bis jetzt Raum und Zeit als Elemente der Bewegung gewürdigt, so ist auch die Masse, welche der in einem bestimmten Umfang befindlichen Stoffmenge proportional ist, zur Beurtheilung der bewegenden Kraft wesentlich. Da jedes Atom jenen passiven Widerstand leistet, welchen wir als Beharrlichkeit kennen lernten, so wächst die bewegende Kraft mit der die Masse bedingenden Anzahl der Atome im bewegten Körper. Soll drei Körpern von den Massen  $1$ ,  $m$  und  $M$  in derselben Zeit die nämliche Geschwindigkeit ertheilt werden, so ist im zweiten und dritten Fall beziehungsweise die  $m$ fache und  $M$ fache Kraft nöthig, als im ersten, folglich für  $c = C$  steht  $k : K = m : M$ . Soll umgekehrt denselben Massen in der nämlichen Zeit beziehungsweise die Geschwindigkeit  $1$ ,  $c$ ,  $C$  verliehen werden, so muss in den beiden letzteren Fällen eine  $c$ mal und  $C$ mal grössere Kraft gewirkt haben, als im ersteren, somit für  $m = M$   $k : K = c : C$ . Sind endlich sowohl die Massen, als die verlangten Geschwindigkeiten verschieden, so soll die Kraft nach der ersten Betrachtung den Massen, laut der zweiten den Geschwindigkeiten proportionirt sein, was gleichzeitig nur möglich ist, wenn Masse und Geschwindigkeit in ein Produkt vereinigt werden,  $k : K = mc : MC$ . — Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit heisst die Bewegungsgrösse eines Körpers und dient zur Beurtheilung der auf ihn gewirkt habenden Kraft, sowie seiner Leistungsfähigkeit, wenn er seine Bewegung auf einen andern Körper überträgt. Allerdings wird für  $mc = MC$  auch  $k = K$ , man darf aber nicht vergessen, dass die Bedingung einer gleichen Zeit der Einwirkung vorausgeschickt wurde, wonach aus der Bewegungs-Grösse ein richtiger Schluss auf den Werth der ursprünglichen Kraft nur unter der Voraussetzung gemacht werden darf, dass die Massen nicht etwa ihre Bewegungs-Grössen allmählig und in ungleichen Zeiten sich erwarben, sondern dass die den zur Beobachtung kommenden Erfolg sogleich fertig setzende Krafteinwirkung in gleichen Zeiten geschah. Die nämliche Wirkung aber darf von Körpern derselben Bewegungs-Grösse nur erwartet werden, wenn die Unterbrechung der Bewegung nicht durch in räumlichen und zeitlichen Distanzen angeordnete Widerstände, sondern momentan geschieht.



**Beispiele.**

1. In welcher Zeit gelangt das Licht von der Sonne zur Erde, wenn die mittlere Entfernung beider zu 20000000 Meilen genommen wird?

$$t = \frac{s}{c} = \frac{20000000}{42000} = 476,2^s = 7^m 56,4^s (8^m 13,22^s)$$

2. Wie oftmal umläuft die Elektrizität in einem gutleitenden Kupferdraht den 5400 Meilen messenden Erdaequator in der Sekunde?

$$60000 : 5400 = 11,1 \dots \text{mal.}$$

3. Wenn 20 Meilen von uns entfernt eine mit einem Knall verbundene Lichterscheinung auftritt, um wie viel Sekunden später bemerkt unser Ohr den ersteren, als das Auge die letztere?

$$\frac{22803,29 \cdot 20}{1022,5} = 44,6^s$$

4. Auf der Oberfläche eines Flusses wird ein Holzstück in 5 Minuten 1800 Fuss weit fortgeführt; welche mittlere Geschwindigkeit hat das Wasser?

$$c = \frac{s}{t} = \frac{1800}{5 \cdot 60} = 6'$$

5. Welche Geschwindigkeit müsste eine 12pfünder Kanonenkugel haben, um dieselbe Bewegungsgrösse zu besitzen, als eine mit 3' Geschwindigkeit schwimmende Eismasse von 80 Centner?

$$mc = MC \quad 12 \cdot c = 3 \cdot 8000 \quad c = \frac{3 \cdot 8000}{12} = 2000'$$

6. Welche absolute Ortveränderung hat der Körper eines Mannes erlitten, welcher in 3 Sekunden die Länge eines Kahnes von Ost gegen West durchgeht, während dieser Kahn in derselben Zeit um 27' von West gegen Ost fährt?

$$27 - 3 \cdot 5 = 12' \text{ von West gegen Ost.}$$

7. Welche Endgeschwindigkeit kommt einem Körper, auf welchen eine beständige Kraft so wirkt, dass er nach der ersten Sekunde, sich selbst überlassen, mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 24' fortginge, nach 13<sup>s</sup> zu?

$$c = gt = 24 \cdot 13 = 312'$$

8. Zwei Massen von 400 und 700 Kilogramm wälzen sich einander entgegen. Welche Geschwindigkeit muss die zweite haben, wenn ihre Bewegungsgrösse diejenige der ersten dreimal übertrifft, und die erste in der Sekunde einen Weg von 15 Meter macht?

$$\begin{array}{ll} 400 \cdot 15 = 6000 & \\ 700 \cdot x = 18000 & x = 25,715 \text{ Meter.} \end{array}$$

9. Von zwei Rennpferden, denen beziehungsweise eine Geschwindigkeit von 30' und 45' eigen ist, läuft das erste um 3 Minuten früher von den Schranken ab. Nach wie viel Minuten ist das zweite



ihm gleichgekommen, und welchen Weg haben dann beide durchgemessen?

$$30 (180 + x) = 45 x$$

$$x = 360 = 6^m$$

$$540.30 = 360.45 = 16200'$$

**10.** Um wie viel Meilen täglich schreitet im Durchschnitt und eine mittlere gleichförmige Bewegung vorausgesetzt die Erde im Raum vorwärts?

$$24.60.60.4 = 345600 \text{ Meilen.}$$

## II.

### Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte.

**1.** Der Punkt im Raume, in welchem die Einwirkung der Kraft auf einen Körper erfolgt, heisst **Angriffspunkt**. Derselbe kann beliebig verlegt werden, sofern dadurch die **Richtung der Kraft** keine Aenderung erleidet und der neue Angriffspunkt mit dem ursprünglichen unveränderlich verbunden ist. **Richtung und Grösse des Bewegungseffektes** kann durch eine vom Angriffspunkt aus gezogene **Gerade** dargestellt werden. Zerlegt man die Kraft in Summanden und weist jedem einen besonderen Angriffspunkt auf dieser Geraden an, so ist, Gleichheit der Richtung vorausgesetzt, der Erfolg derselbe, als wenn die ungetheilte Kraft an einem Punkte einwirkte. Durch Umkehrung dieses Verfahrens erhält man den Satz, dass die Wirkung mehrerer gleichgerichteter Kräfte durch ihre **Summe** bestimmt werde.

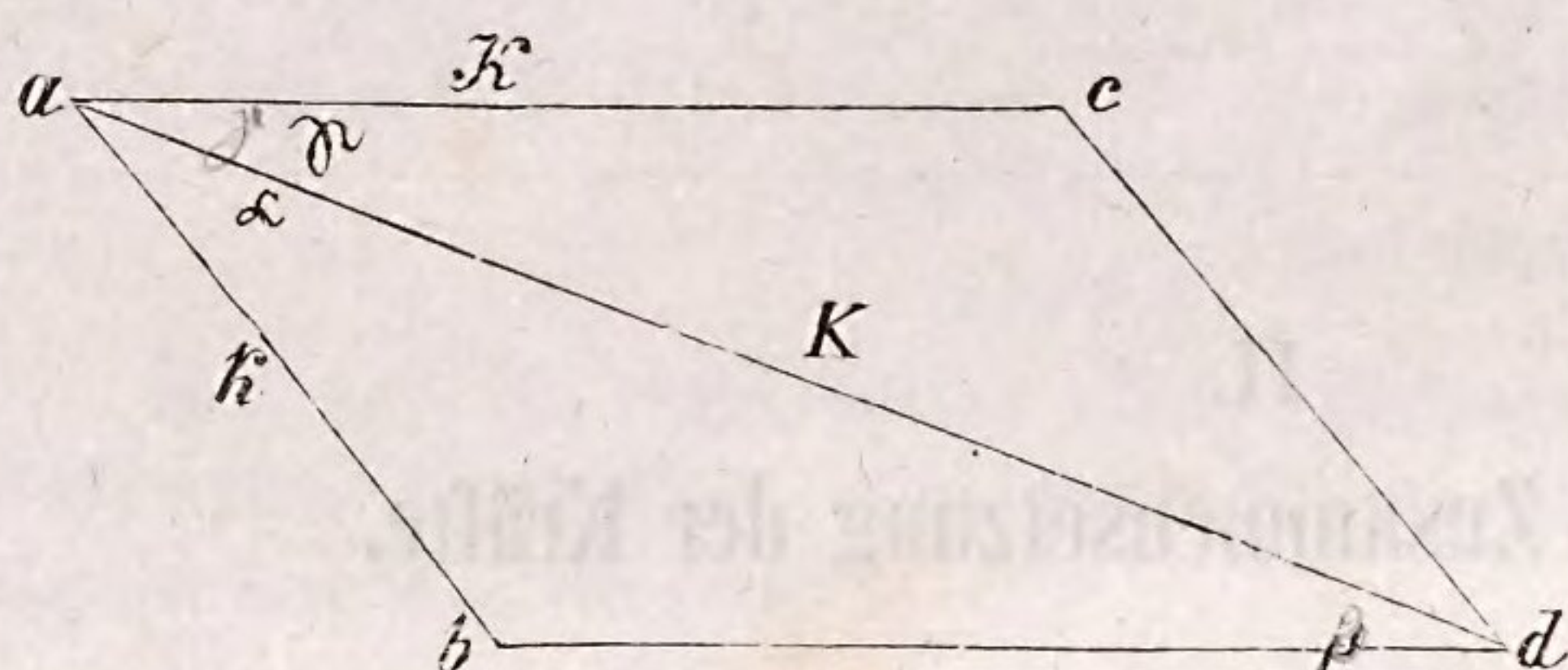
**2.** Wirken zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt, so entspricht der Erfolg ihrer Differenz, welche, wenn sie gleich sind, Null wird. In diesem Fall halten sich demnach die Kräfte im Gleichgewicht und der Punkt bleibt in Ruhe; sonst bewegt er sich nach der von der grösseren Kraft vorgeschriebenen Richtung mit einer Geschwindigkeit, deren Werth vom Unterschied der beiden Kräfte gegeben wird.

**3.** Sind die Richtungen mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt oder auf ein festverbundenes System materieller Punkte einwirken, in welch' letzterem Fall jeder Punkt im Körper in der Richtung der Kraft als Angriffspunkt betrachtet werden darf, weder dieselben, noch entgegengesetzt, so verlaufen sie entweder unter Winkeln oder parallel.



4. Machen die Richtungen der gleichzeitig einen materiellen Punkt angreifenden Kräfte einen Winkel mit einander, so kann die hervorgebrachte Bewegung keiner derselben einseitig folgen, weil sonst der Voraussetzung entgegen die andere Kraft auf Null gebracht wäre, denn bei dem nothwendigen Causalverband zwischen Kraft und Wirkung geschähe das, was an dieser zugelassen wird, an jener selber. Man kann sich vorstellen, dass der von zwei Kräften gleichzeitig beeinflusste Körper zuerst den ihm von der Kraft  $k$  vorge-

Fig. 1.



schriebenen Weg  $ab$ , darauf den mit der Linie  $ac$ , welche nach Grösse und Richtung der Kraft  $K$  entspricht, parallelen und gleichen Weg  $bd$ , durchlaufe, der Schlusseffekt also darin bestehe, dass der Körper nach  $d$  gelangt. Letzteres bestätigt die Erfahrung, statt der

doppelten Wege wird jedoch in Wirklichkeit der einfache Weg  $ad$  zurückgelegt. Der Weg  $ad$ , welchen der unter der gleichzeitigen Einwirkung der Kräfte  $K$  und  $k$  stehende Körper in derselben Zeit durchläuft, in welcher ihn jede einzelne derselben beziehungsweise durch die Strecken  $ac$  und  $ab$  triebe, ist die Diagonale des aus den beiden letzteren Grössen konstruirten Parallelogramms. Sofern man Grösse und Richtung einer Kraftwirkung in einer Geraden ausdrückt, ist überhaupt die resultirende Kraft (Resultante) zweier gleichartiger, d. h. konstanter oder momentaner Seitenkräfte (Componenten, Composanten), welche an einem Angriffspunkt nach verschiedenen Richtungen wirken, durch die Diagonale des Kräfteparallelogramms ausgedrückt, dessen im Angriffspunkt zusammenstossende Seiten die beiden Seitenkräfte sind. Sind die letzteren ungleichartig, die eine kontinuierlich, die andere momentan, so wird die geradlinige Diagonale in eine Kurve verwandelt.

Schliessen die Seitenkräfte einen rechten Winkel ein, so besteht zwischen ihnen ( $K, k$ ) und der Mittelkraft  $K$  die Relation des Pythagoräischen Lehrsatzes  $K = \sqrt{K^2 + k^2}$ . Sonst geschehen die Rechnungen am besten auf trigonometrischem Weg. Weil  $\angle b$  der Supplementwinkel von  $a$  ist, so steht

$$\frac{ad}{bd} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \quad \text{woraus} \quad K = \frac{\sin a}{\sin \alpha} k$$

$$ad : bd = \sin a : \sin \alpha$$



Auch ist  $K = \sqrt{K^2 + k^2 - 2Kk \cdot \cos b} = \sqrt{K^2 + k^2 + 2Kk \cos a}$

$$\text{und } \frac{\tan \frac{a + \beta}{2}}{\tan \frac{a - \beta}{2}} = \frac{K + k}{K - k}$$

$$\frac{\tan \frac{a}{2}}{\tan \frac{a - 2\beta}{2}} = \frac{K + k}{K - k}$$

oder weil

$$\begin{aligned} \wedge \beta &= \gamma \\ \wedge a + \beta &= a + \gamma \\ \wedge a + \gamma &= \wedge a \\ \wedge a - \beta &= a - \gamma - \beta \end{aligned}$$

Wirken mehr als zwei Kräfte, welche sämmtlich in derselben Ebene liegen, auf einen materiellen Punkt, so findet man die Resultante, indem man zwei Componenten zu einem Parallelogramm, die Diagonale dieses mit der dritten Componenten zu einem neuen Parallelogramm u. s. f. verbindet und im letzt so erhaltenen die Diagonale zieht. Liegen die auf einen materiellen Punkt gleichzeitig wirkenden Kräfte nicht in einer Ebene, so führe man sie auf drei in diesem Punkt angreifende zu einander senkrechte Krafrichtungen zurück, was mittels der vorstehenden Theorie des Kräfteparallelogramms möglich ist, konstruire ein Parallelopiped, welches das aus zwei der gegebenen Kräfte bestimmte Rechteck zur Grundfläche, die dritte aber zur Höhe hat, und ziehe in diesem von dem etwa das untere vordere linke Eck bildenden Angriffspunkt eine Gerade zum oberen hinteren rechten Eck, so repräsentirt diese Gerade Richtung und Grösse der Resultanten.

Die Umkehrung dieser Betrachtung und der Construktionsweisen verhilft dazu, eine gegebene Kraftwirkung als das Resultat mehrerer verschieden gerichteter Kräfte anzusehen und so eine Mittelkraft in wirkliche oder hypothetische Seitenkräfte zu zerlegen.

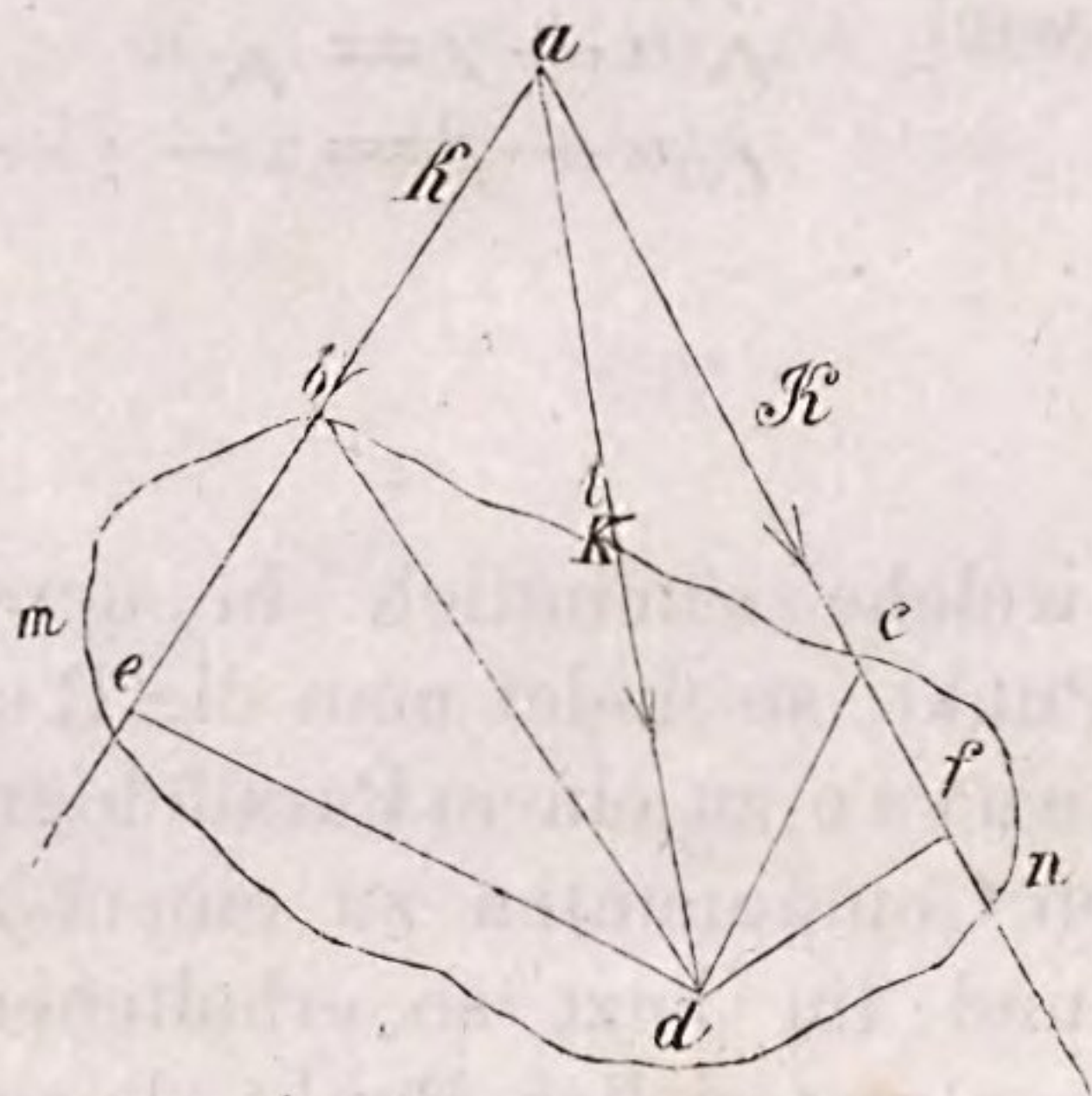
5. Sind die Angriffspunkte mehrerer auf ein fest verbundenes System materieller Punkte gerichteter Kräfte verschieden, so können ihre Richtungen einen beliebigen Winkel machen oder parallel sein. In ersterem Fall führt folgende Konstruktion zu Grösse, Richtung und Angriffspunkt der Resultanten  $K$  der beiden Kräfte  $K$  und  $k$  (siehe Fig. 2 folgende Seite).

Der Angriffspunkt der Resultanten  $K = ad$  kann von  $l$  nach  $d$  verlegt und die Richtung jeder Seitenkraft von  $a$  bis  $e$  und  $f$  verlängert werden. Dann sind  $de$  und  $df$  die Entfernungen des Angriffspunktes der Resultanten, oder da dieser, wenn keine Bewegung erfolgen soll, hinreichend unterstützt sein muss, des Stützpunktes von den Richtungen der Seitenkräfte. Die in den Formeln dargestellten Pro-



dukte dieser Entfernungen in die Kräfte, welche für den Gleichgewichtstand gleich befunden wurden, heißen statische Momente.

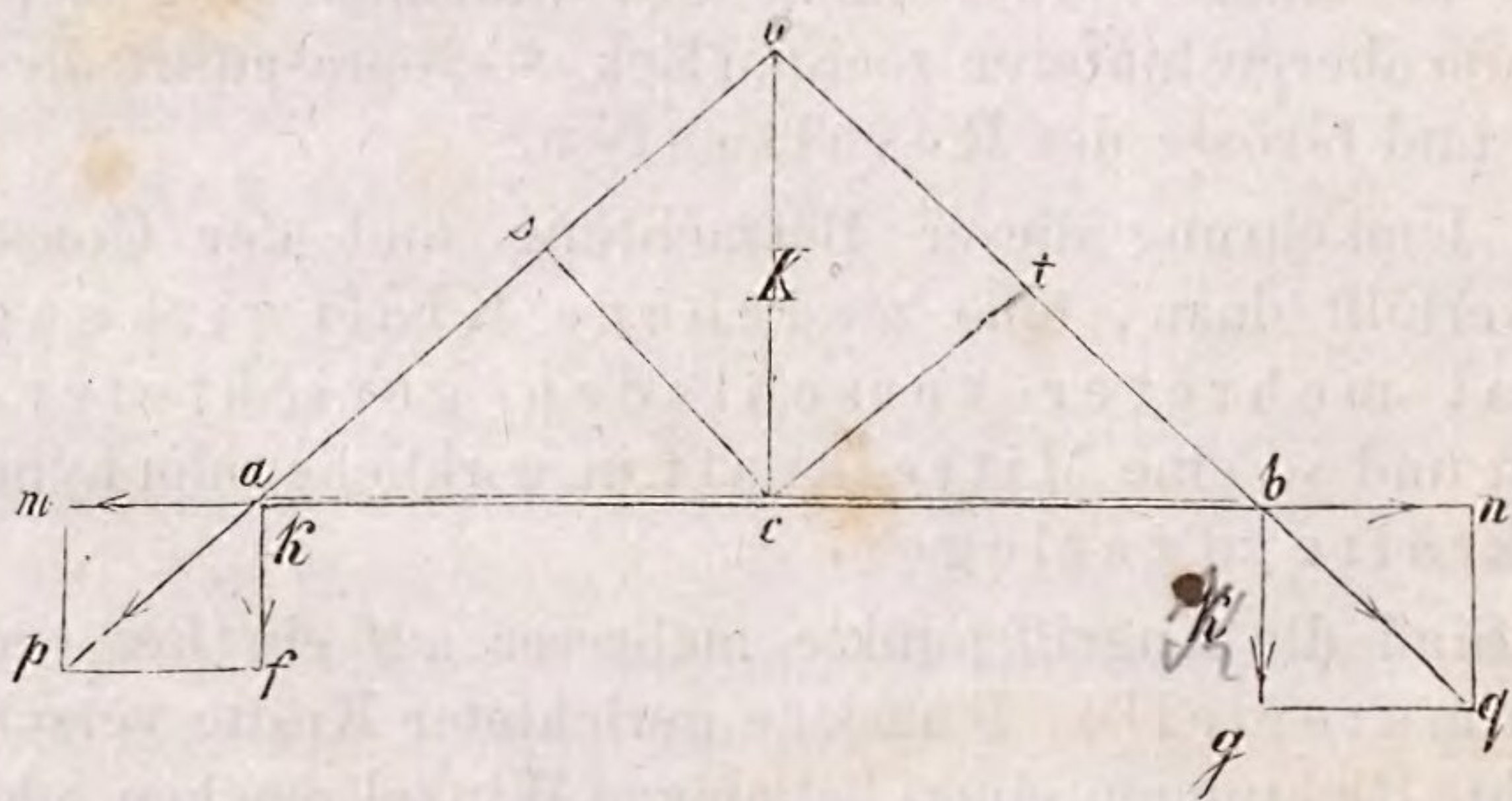
Fig. 2.



$$\begin{aligned} ac &= bd = K \\ ab &= cd = k \\ de &\perp ae \quad df \perp af \\ \triangle bde &\sim cdf \\ \frac{bd}{de} &= \frac{cd}{df} \\ K \cdot df &= k \cdot de \end{aligned}$$

6. Im zweiten der oben aufgestellten Fälle ist zu unterscheiden, ob die Kraftrichtungen in gleichem oder entgegengesetztem Sinn verlaufen.

Fig. 3.



Die beiden Kräfte  $K$  und  $k$  greifen die materielle Linie  $ab$  in den Punkten  $a$  und  $b$  an und wirken unter sich parallel abwärts. Lässt man in  $a$  und  $b$  die beiden gleichen, aber entgegengesetzten, somit sich aufhebenden Kräfte  $am$  und  $bn$  agiren, so erscheinen  $ap = os$  und  $bq = ot$  beziehungsweise als Resultanten der Seitenkräfte  $K$  und  $bn$ ,  $k$  und  $am$ . Nach dem Vorigen wird  $oc = K$  als Mittelkraft der Componenten  $os$  und  $ot$  gefunden, also ist  $K$  auch die Resultante der gegebenen Kräfte  $K$  und  $k$ , gleich ihrer Summe  $K = K + k$

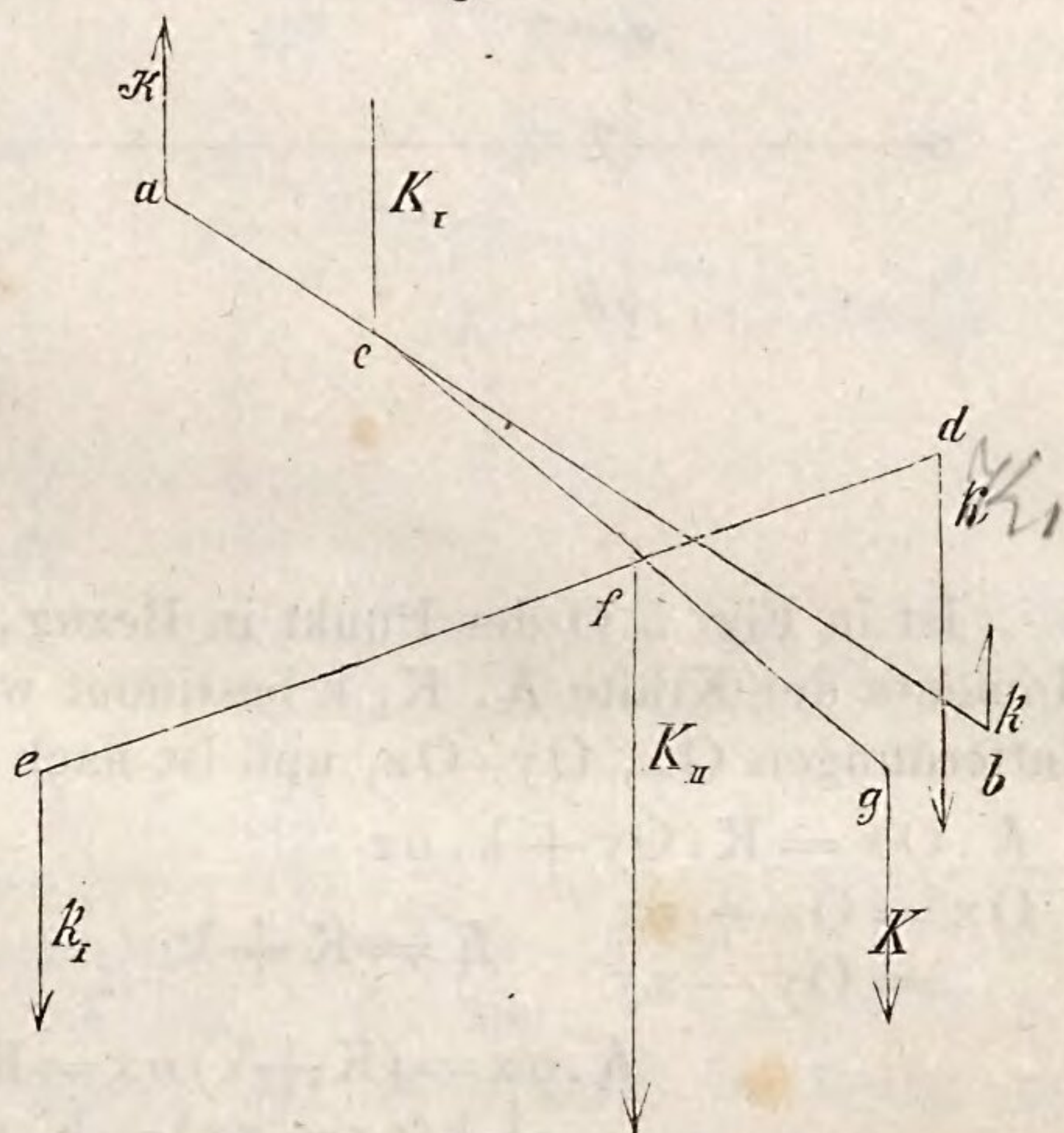


und ihr Angriffspunkt ist  $c$ . Dieser liegt in der Mitte von  $ab$ , wenn die Seitenkräfte gleich waren; ausserdem ist in Fig. 3  $\triangle apf \sim oca$  und  $\triangle bgq \sim ocb$  folglich

$$\left. \begin{array}{l} k : pf = oc : ac \\ K : gq = oc : bc \end{array} \right\} K : k = ac : bc$$

d. h. die Seitenkräfte stehen in umgekehrtem Verhältniss zu ihren Entfernungen vom Angriffspunkt der Mittelkraft. Dieser Satz gilt auch, wenn die Parallelkräfte in entgegengesetztem Sinn wirken, in welchem Fall die Resultante ihrer Differenz gleicht.

Fig. 4.



$$\begin{aligned} K_r &= K + k & \frac{K}{k} &= \frac{bc}{ac} \\ K'' &= K' + k' & \frac{K'}{k'} &= \frac{ef}{df} \\ K &= K'' - K' & \frac{K''}{K'} &= \frac{cg}{fg} \\ &= K' + k' - K - k \end{aligned}$$

Nach Figur 4 wird die Mittelkraft einer beliebigen Anzahl paralleler gleich oder entgegengesetzt gerichteter Kräfte gefunden, indem man je zwei derselben in ein System kombinirt und die so gefundenen Resultanten wieder verbindet, bis als Endresultante eine Kraft erscheint, welche im sogenannten Mittelpunk der Parallelkräfte angreift und den Werth der algebraischen Summe aller Kräfte hat. Auch hier findet das oben angeführte Gesetz der statischen Momente für die Lage des Angriffspunktes, welcher zugleich Stützpunkt des angegriffenen Körpers zu sein hat, Anwendung.

7. Eine allgemeine Betrachtung der statischen Momente führt zu folgenden Sätzen:

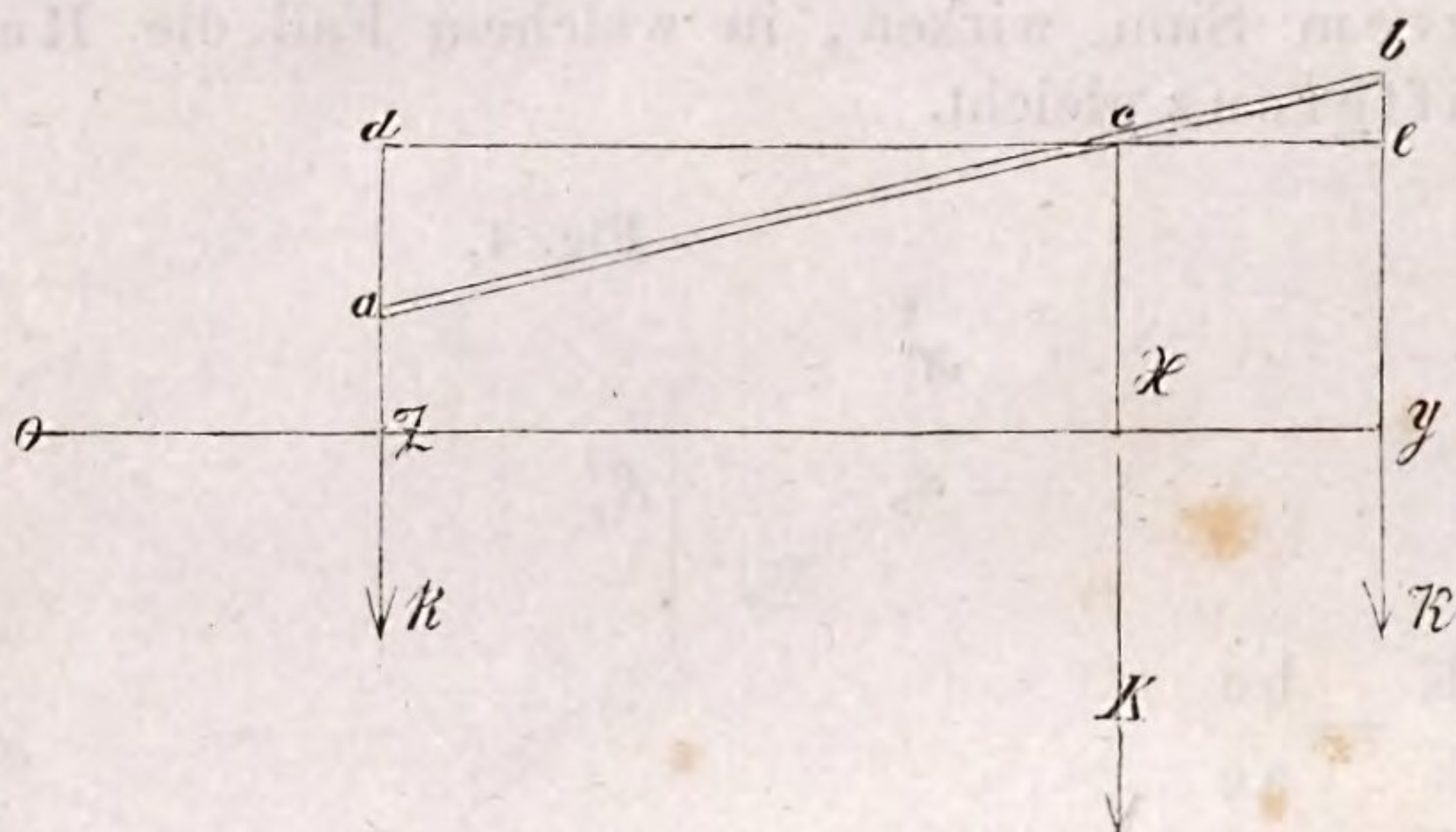
Die statischen Momente zweier auf einen Punkt wirkender Kräfte in Beziehung auf irgend einen in ihrer Resultanten liegenden Punkt sind einander gleich.

Das statische Moment der Mittelkraft zweier Kräfte in Be-



zug auf einen ausserhalb der Resultanten liegenden Mittelpunkt ist, wenn dieser auch ausserhalb der Componenten liegt, gleich der Summe der Momente dieser Componenten in Bezug auf diesen Punkt, wenn aber dieser Mittelpunkt noch innerhalb des Winkels oder Angriffsgebietes der Componenten liegt, gleich der Differenz ihrer Momente.

Fig. 5.



Ist in Fig. 5 O der Punkt in Bezug, auf welchen die statischen Momente der Kräfte  $K$ ,  $K$ ,  $k$  bestimmt werden sollen, so sind deren Entfernungen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , und ist nach obigem Satz

$$K \cdot Ox = K \cdot Oy + k \cdot oz$$

$$Ox = Oz + zx \quad K = K + k$$

$$= Oy - xy$$

$$K \cdot ox = (K + k) ox = K \cdot ox + k \cdot ox = K (Oy - xy) + k(oz + zx) = K \cdot Oy - K \cdot xy + k \cdot oz + k \cdot zx$$

$$xy = ec \quad zx = dc$$

$$K \cdot ce = k \cdot dc$$

$$K = K \cdot oy + k \cdot oz$$

In Figur 6 (siehe folgende Seite) liegt der Mittelpunkt o zwar nicht in den Resultanten, aber innerhalb der der Componenten und ist für diesen Fall

$$\left. \begin{aligned} oc &= ac - oa \\ &= ob - bc \end{aligned} \right\} K \cdot oc = (K + k) oc$$

$$= K \cdot (ob - bc) + k(ac - oa)$$

$$= K \cdot ob - K \cdot bc + k \cdot ac - k \cdot oa$$

$$K \cdot bc = k \cdot ac$$

$$= K \cdot ob - k \cdot ao$$

Das statische Moment der Resultanten beliebig vieler auf einen Punkt wirkender in derselben Ebene liegender Kräfte ist gleich der algebraischen Summe aller statischen Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene.



Das statische Moment der Resultanten zweier Parallelkräfte in Bezug auf eine Ebene ist gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte in Beziehung auf dieselbe Ebene, bei entgegengesetzter Richtung der Kräfte aber gleich der Differenz.

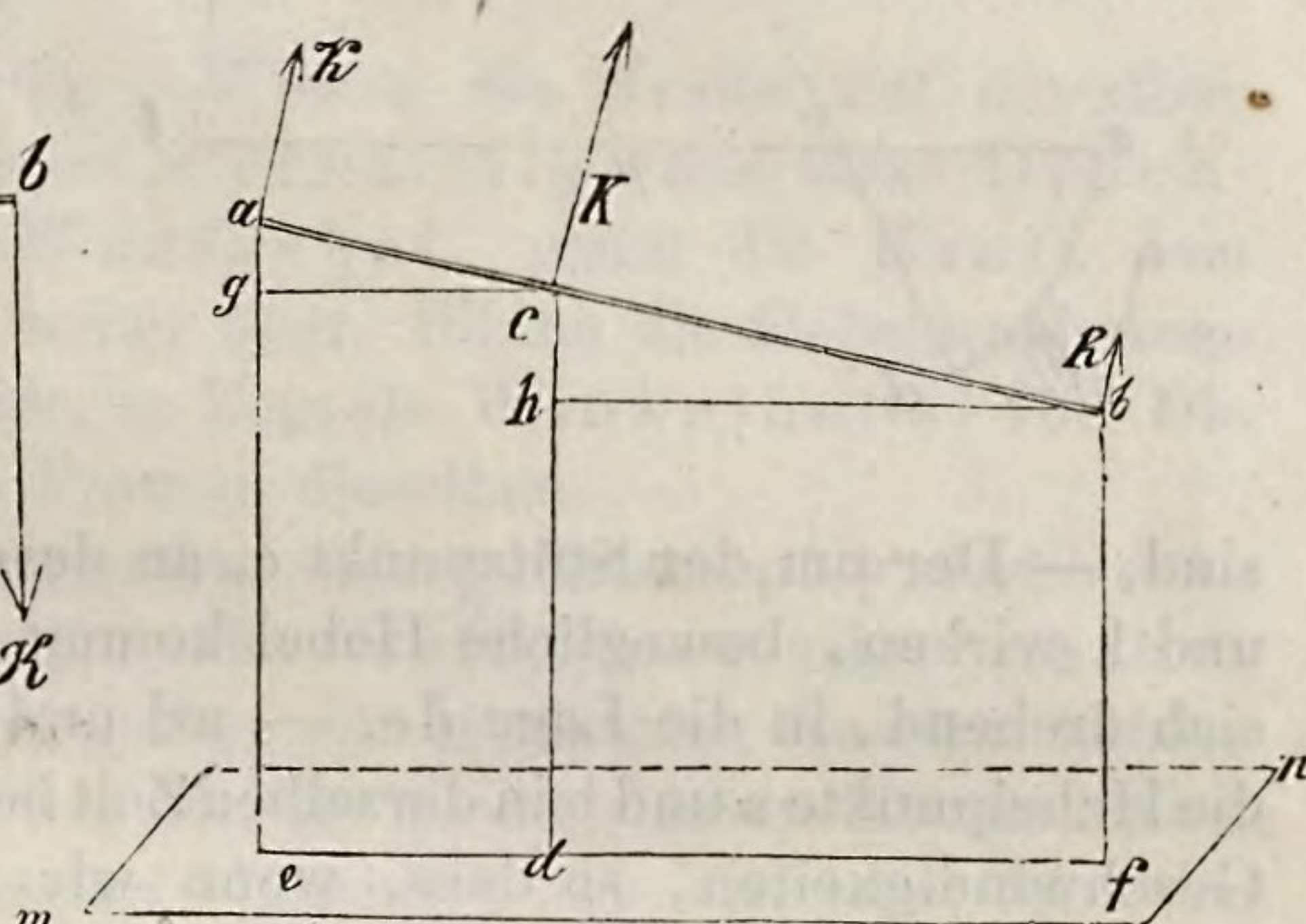
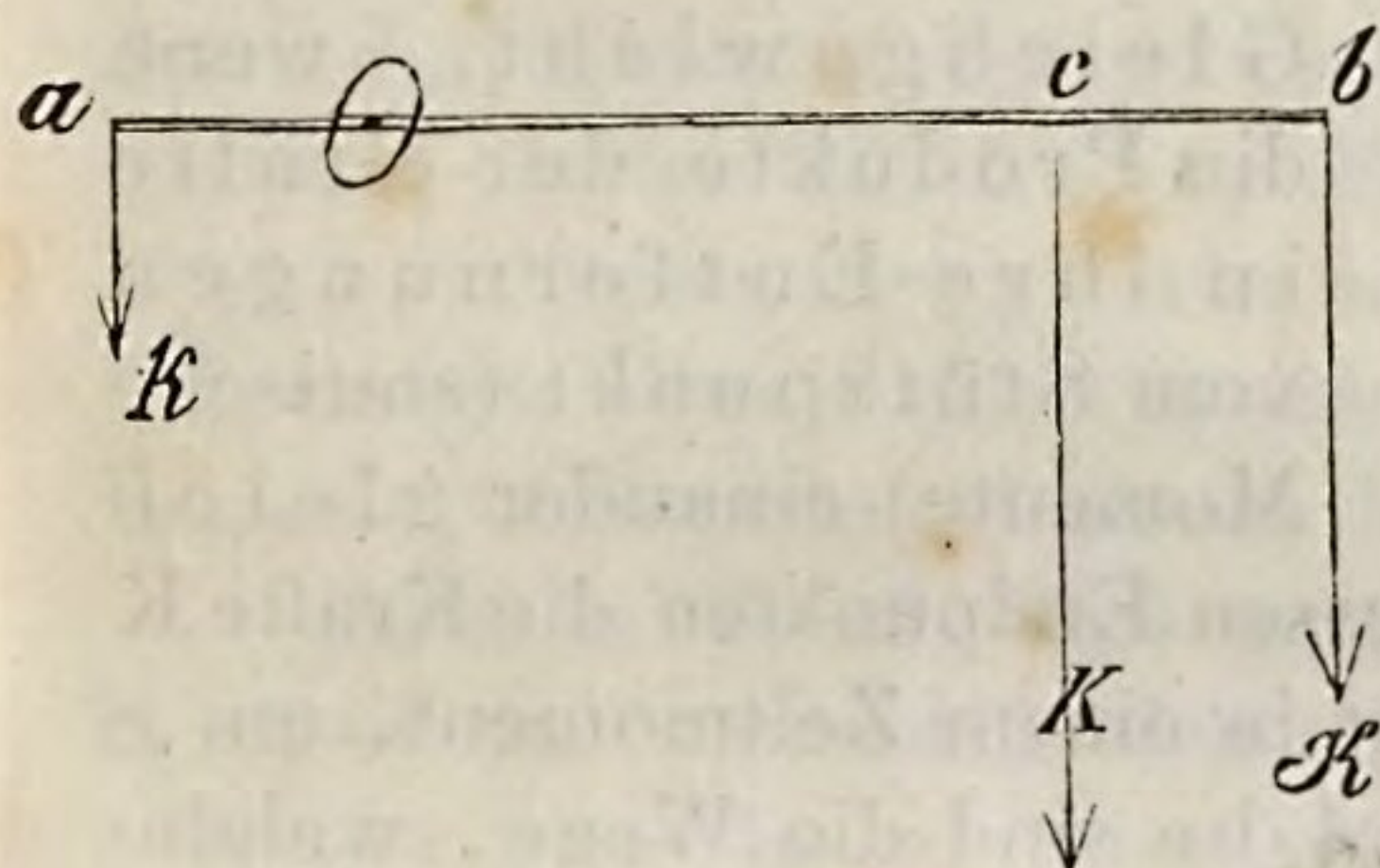
In Fig. 7 ist  $K = K \perp k$   $\triangle acg \sim bch$   
 $K.ac = k.bc$   $ac:bc = ag:ch$   
 $= ae - cd : cd - bf$

$$K. bc \frac{ae - cd}{cd - bf} = k.bc$$

$$ac = bc \frac{ae - cd}{cd - bf}$$

Fig. 7.

Fig. 6.



$$\begin{aligned} K(ae - cd) &= k(cd - bf) \\ K.ae \vdash k.bf &= cd(K \vdash k) \\ &= K.cd. \end{aligned}$$

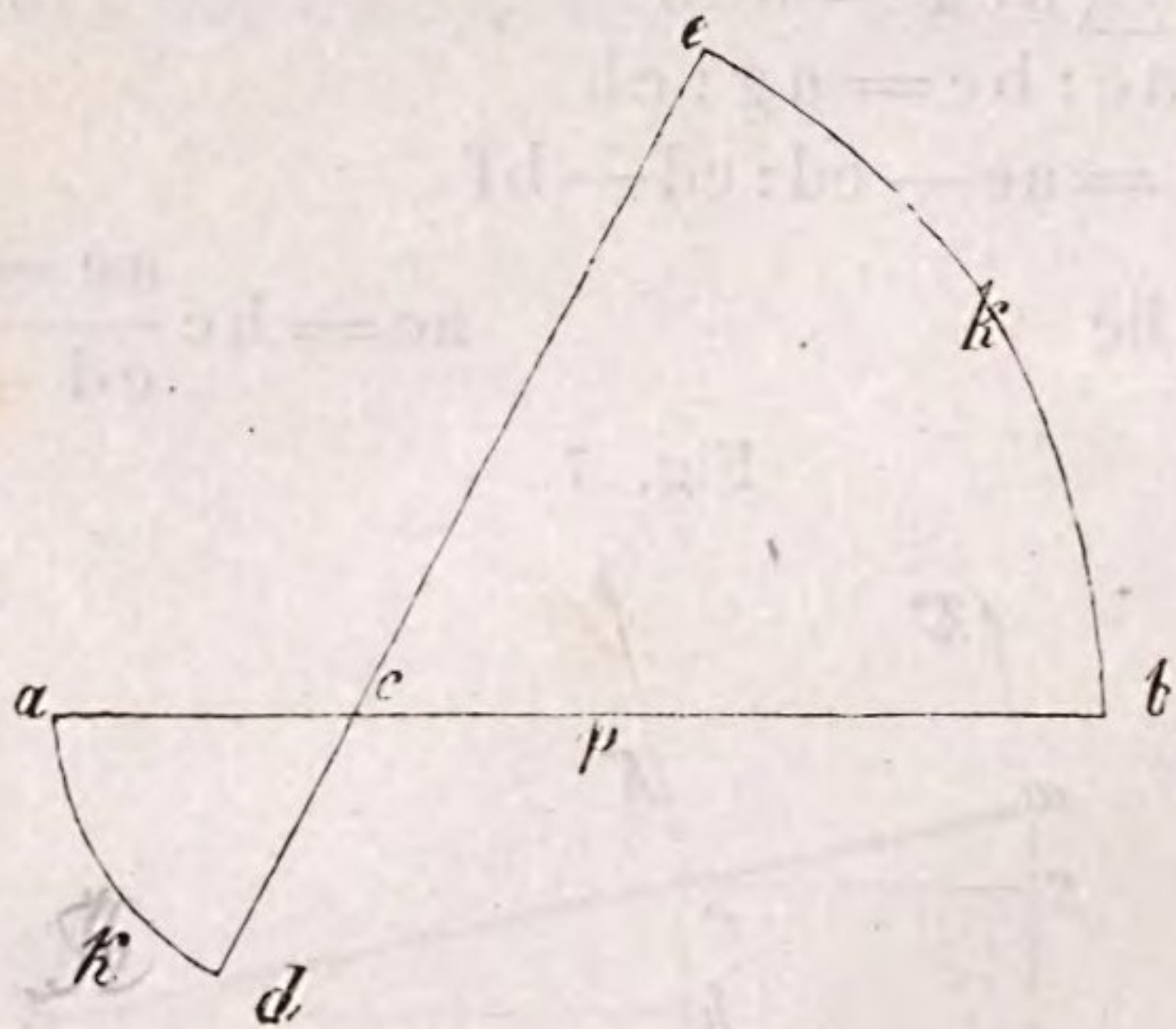
Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf jede der drei Coordinatenebenen paralleler Kräfte im Raum ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte in Bezug auf dieselben Ebenen.

(8. Da die Entfernung des Angriffspunktes der Resultanten zur Grösse der betreffenden Seitenkraft in umgekehrtem Verhältniss steht, so sind die statischen Momente zweier paralleler gleicher, aber entgegengesetzt wirkender Kräfte einander gleich, das statische Moment der Resultanten daher, welches in diesem Fall der Differenz jener statischen Momente gleicht, Null. Demnach haben Kräfte der beschriebenen Art, Kräftepaare genannt, keine einzelne Resultante, was auch für ein beliebiges auf ein Paar zurückführbares Kräftesystem gilt, und müssen für den Gleichgewichtstand durch ein Gegenpaar aufgehoben werden. — Die Wirkungen zweier Kräftepaare, in gleichen oder parallelen Ebenen liegend, verhalten sich wie ihre Momente, sind also gleich, wenn diese die nämlichen Werthe haben. — Zwei oder mehrere Kräftepaare, sie mögen in gleichen, parallelen oder sich schneidenden Ebenen liegen, lassen sich stets auf ein einziges Kräfte-



paar zurückführen, und sonach lässt auch umgekehrt ein solches in zwei komponirende Kräftepaare sich zerlegen.

Fig. 8.



9. Die fruchtbarste Anwendung erleiden die statischen Momente am Hebel, worunter man eine gewichtlose unbiegsame Linie versteht, welche in einem Punkt unterstützt ist, während an zwei anderen Punkten Kräfte auf sie wirken. — Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Produkte der Kräfte in ihre Entfernungen vom Stützpunkt (statische Momente) einander gleich

sind. — Der um den Stützpunkt c, an dessen Endpunkten die Kräfte K und k wirken, bewegliche Hebel kommt in einem Zeitmoment, um c sich drehend, in die Lage de. — ad und be sind die Wege, welche die Hebelpunkte a und b in derselben Zeit beschreiben, also deren relative Geschwindigkeiten, so dass, wenn wir uns die Kräfte K, k in den genannten Punkten als schwere Massen vereinigt denken, die beiderseitigen Bewegungsgrößen  $K \cdot ad$  und  $k \cdot be$  heißen, welche für den Stand des Gleichgewichtes dieselben Werthe haben.

$$\begin{aligned} K \cdot ad = k \cdot be \quad K : k = be : ad & \quad \left. \begin{aligned} & K : k = bc : ac \\ & be : ad = bc : ac \end{aligned} \right\} K \cdot ac = k \cdot bc \end{aligned}$$

Da  $K \cdot ac - k \cdot bc = 0$ , und  $K \cdot ad - k \cdot be = 0$ , was unter ähnlichen Umständen auch für mehrere in eine Ebene fallenden Kräfte gilt, so ergibt sich das Bernouilli'sche Princip der virtuellen Geschwindigkeiten: Wenn mehrere Kräfte in eine Ebene fallen und im Gleichgewicht sind, so muss bei einer geringen Umdrehung des ganzen Systems um einen willkürlichen Punkt die algebraische Summe der Produkte jeder Kraft in den von ihr durchlaufenen Weg Null sein.

Greifen die Kräfte unter beliebigen Winkeln die Hebellinie an, so ist nach den Gesetzen der statischen Momente:  $K \cdot cd = k \cdot ce$  (siehe Fig. 9 folgende Seite).

$$\begin{aligned} cd = ac \cdot \sin \gamma = ac \sin \alpha & \quad \left. \begin{aligned} & ce = bc \sin \delta = bc \sin \beta \end{aligned} \right\} K \cdot ac \sin \alpha = k \cdot bc \sin \beta \end{aligned}$$

Weil im erstbetrachteten Fall  $\sin \alpha = \sin \beta = \sin 90^\circ = 1$  ein Maximum ist, so wird beim schiefen Zug an Kraft verloren.

Indem sich nach der Proportion  $K : k = be : ad$  die Kräfte verkehrt, wie die in derselben Zeit von ihren Angriffspunkten zurückgelegten Wege verhalten, so kann man sagen, dass bei Hebelbewegungen



Gewinn an Kraft mit Verlust an Zeit oder Weg, und umgekehrt einhergeht.

Die Entfernungen der Kräfte vom Stützpunkt  $ac$  und  $bc$  heissen Hebelarme. Der Hebel ist unter der gegebenen Anordnung, wobei gewöhnlich die am kürzeren Arm angebrachte Kraft als Last

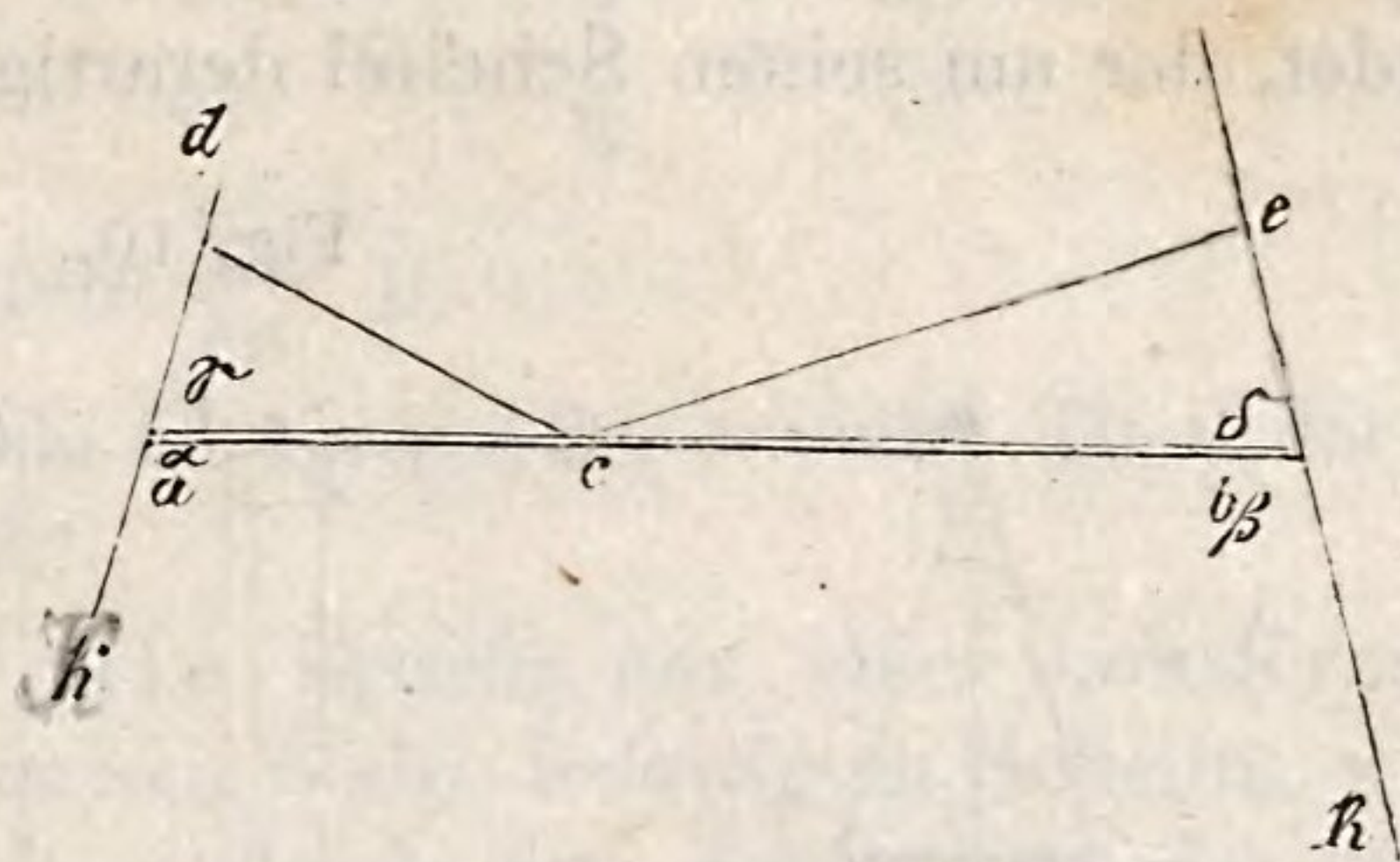


Fig. 9.

aufgefasst wird, zweiarmig. Wirken die Kräfte auf derselben Seite des Stützpunktes, so heisst er einarmig, und zwar Druckhebel, wenn die Last, Wurfhebel, wenn die Kraft dem Unterstützungspunkt näher liegt. Bilden die Hebelarme einen konstanten Winkel miteinander, so liegt ein Winkelhebel vor. Die Gesetze bleiben in all diesen Formen dieselben.

Alle in Wirklichkeit gebrauchte — sogenannte physische — Hebel unterscheiden sich vom theoretischen oder mathematischen darin, dass sie selber ein bestimmtes Gewicht haben. Denkt man in Figur 8 sich dasselbe im geometrischen Mittelpunkt  $p$  vereinigt, so ist dessen statisches Moment  $p \cdot cp$  und steht dann für das Gleichgewicht am Hebel  $K \cdot ac = k \cdot bc + p \cdot cp$ .

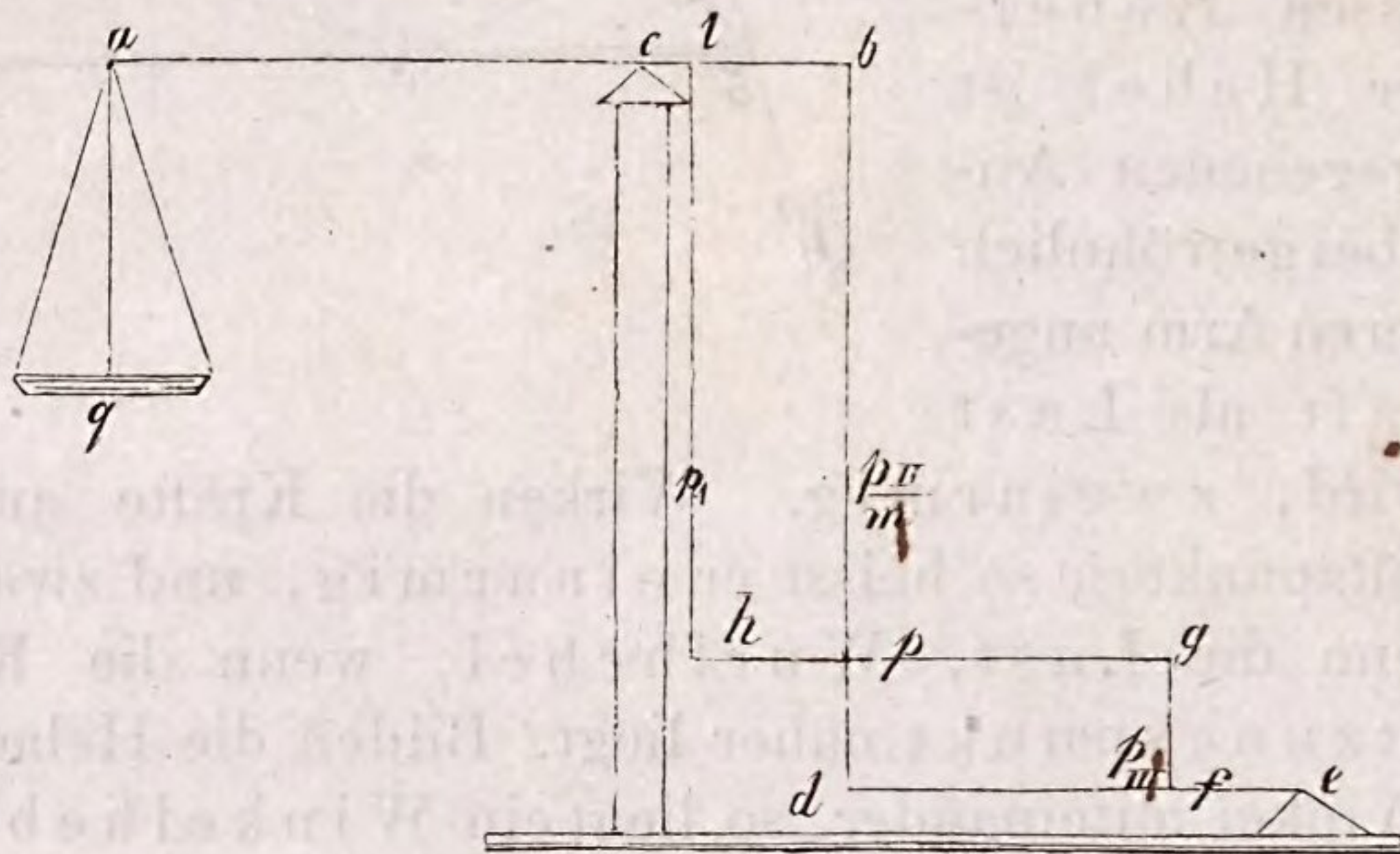
**10.** Der Hebel nimmt theils einzeln, theils in zusammengesetzten Hebelsystemen an Häufigkeit und Wichtigkeit der Anwendung unter den Maschinenelementen die erste Stelle ein. Bei verschiedenen Handwerkszeugen und häuslichen Vorrichtungen, wie Scheeren, Zangen, den Handgriffen der Bohrer, den Rudern, Brecheisen, Schaufeln, der Thürklinke, dem Klingelhaken und Aufzug kommt seine Wirkungsweise täglich zur Benutzung. Auch gründete die Natur die stofflichen Voraussetzungen thierischer Bewegungen: Knochen, Bänder und Muskeln in ihrer ineinander greifenden Thätigkeit auf seine Gesetze:

Die gewöhnliche Wage ist ein gleicharmiger Hebel, welcher etwas oberhalb seines Schwerpunktes freibeweglich unterstützt ist. Das grösste Gewicht, mit welchem man die Wage, ohne ihr zu schaden, belasten darf, bestimmt ihre Tragkraft, das kleinste Gewicht, das unter jener Maximalbelastung noch einen Ausschlag nach der einen Seite hervorruft, ihre Empfindlichkeit, welche bei guten Exemplaren  $\frac{1}{60000}$  bis 0,0000005 beträgt. — Die Schnellwage ist ein ungleicharmiger Hebel, an dessen kürzeren Arm die Last gehängt wird, während ein auf dem längeren Arm verschiebbares Gewicht den Hebelgesetzen gemäss durch seine Entfernung vom Stützpunkt die Last misst. — Die in kleineren geschlossenen Räumen



zu Bestimmung sehr geringfügiger Gewichte angewendeten Zeigerwagen werden von einem ungleicharmigen Winkelhebel gebildet, der um seinen Scheitel derartig drehbar ist, dass unter Be-

Fig. 10.



festigung der Last am kürzeren Schenkel die Neigung des längeren Armes gegen den Horizont deren Gewicht ausdrückt. — Ebenfalls nur für feinere, meist wissenschaftliche Messungen brauchbar, sind die auf der Elasticität gewundener Drähte beruhenden Coulomb'sche Drehwage und Hooke's Torsionswage. — In weit allgemeinerer Anwendung steht die Brückenwage Figur 10. An dem in  $c$  unterstützten Wagbalken, dessen Arm  $cl$  zu  $ae$  in einem bestimmten Verhältniss steht, beiden Decimalwagen wie 1 zu 10, wird in  $a$  das Gewicht angebracht, die Last aber auf die beiden Punkte  $b$  und  $l$  vertheilt. Die in  $b$  eingelassene Stange trägt nämlich die Basis  $de$ , deren Stütz- und Drehpunkt in  $e$  liegt, die den Wagbalken in  $l$  angreifende Stange dagegen die Brücke  $hg$ , deren Ende durch  $gf$  so auf  $de$  ruht, dass  $de:fe = cb:cl$ . Die auf  $hg$  gelegte Last  $p$  theilt sich in die Summanden  $p, + p,,$  deren einer  $p,$  mittels  $hl$  am Wagbalken zieht, während  $p,,$  durch  $gf$  auf  $de$  drückt. Ist aber  $fe = \frac{de}{n}$ , so ist dieser Druck gerade so gross, als wenn in  $d$  die Last

$\frac{p,,}{n}$  angebracht wäre, weil  $\frac{p,,}{n} de = p,, fe = p,, \frac{de}{n}$  und weil ferner auch  $cl = \frac{cb}{n}$ , so wirkt die an  $b$  übertragene Last  $\frac{p,,}{n}$  gleich dem Gewicht  $n \frac{p,,}{n} = p,,$  im Punkt  $l$ , weil  $p,, cl = p,, \frac{cb}{n} = \frac{p,,}{n} cb$ .

Nachdem schon anfänglich der Gewichtssummand  $p,$  als hier angreifend bemerkt wurde, kann die ganze Last  $p$  im Punkte  $l$  vereint gedacht werden.



Nun ist  $cl \cdot p = ca \cdot q$

$$p = \frac{ca}{cl} q \quad \frac{p}{q} = \frac{ac}{cl}$$

$$q = \frac{cl}{ca} p$$

wonach das in  $a$  anzubringende Gewicht  $q$  der sovielte Theil der Last  $p$  ist, als  $cl$  in  $ca$  enthalten ist.

Das Rad an der Welle besteht aus einer kreisförmigen, concentrisch an einer cylindrischen Walze befestigten Scheibe, welche mit ihr um den gemeinsamen zugleich den Stützpunkt des ganzen Systems bildenden Mittelpunkt drehbar ist. Ist die Kraft  $K$  an der Peripherie des Rades vom Halbmesser  $R$  und die Last am Umfang der Welle vom Radius  $r$  angebracht, so ist die Gleichung der statischen Momente  $K \cdot R = P \cdot r$

$\frac{P}{K} = \frac{R}{r}$ , wonach die zur Hebung der

Last anzuwendende Kraft so oft in ersterer enthalten ist, als der Halbmesser der Welle in demjenigen des Rades. Die Kraft muss aber einen Weg gleich der Peripherie des Rades durchlaufen, wenn die Last um eine Strecke gleich dem Wellenumfang gehoben werden soll. Desshalb wird eben so viel, als durch Vergrößerung des Ver-

hältnisses  $\frac{R}{r}$  Kraft erspart wird, Geschwindigkeit oder Zeit verloren.

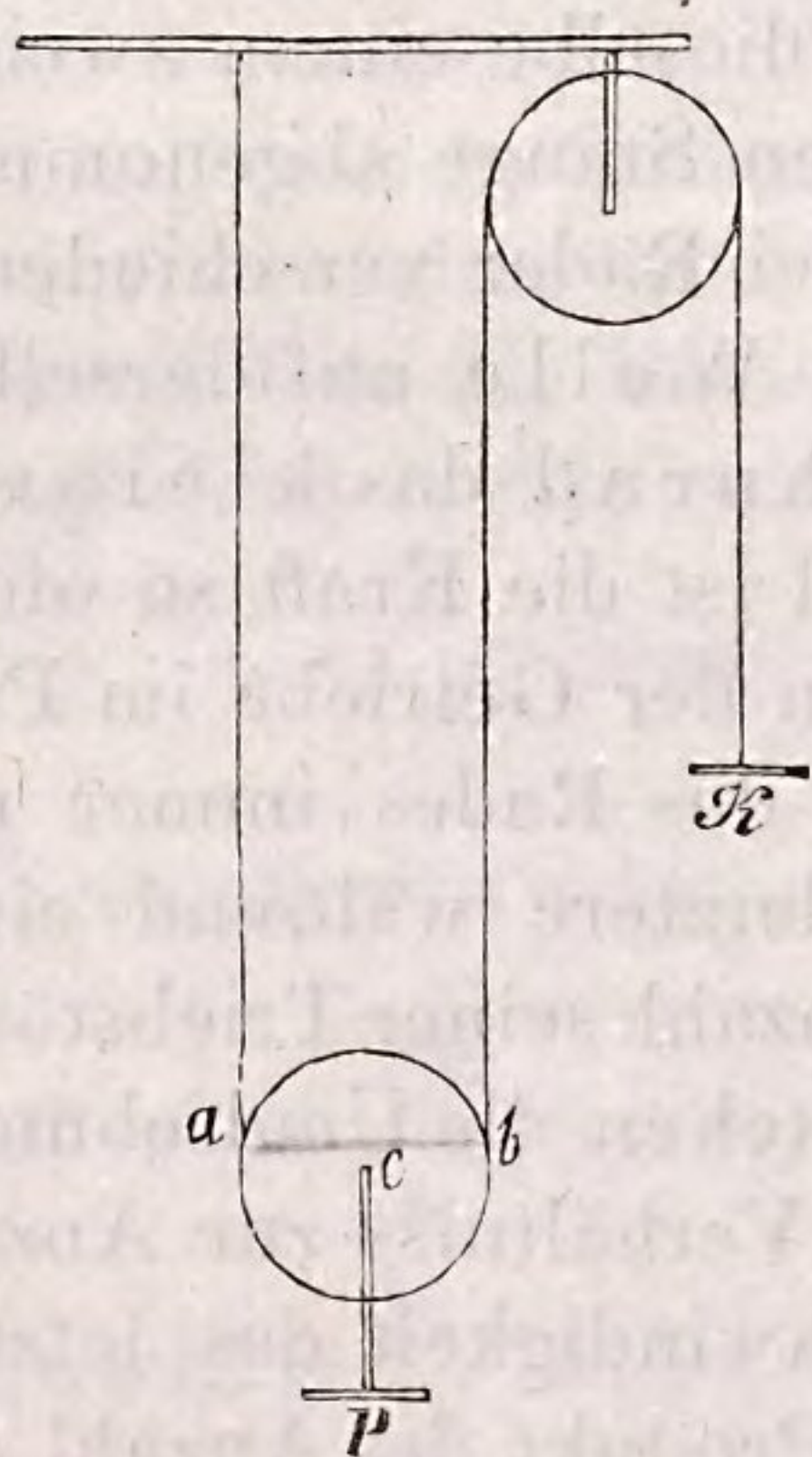
Räder, auf deren Umfang Vertiefungen und Hervorragungen in regelmässigen Abständen angebracht sind, werden häufig so combinirt, dass die Hervorragungen (Zähne) des einen in die Vertiefungen des andern eingreifen. Wie hier die Bewegung des ersten Rades auf das zweite übertragen wird, so kann auch dieses dieselbe einem zweiten übermitteln, oder sie kann von einer gezähnten Stange abgenommen werden. Sind in einem Räderwerk je zwei Räder verschiedenen Durchmessers nach Art des Rades an der Welle auf derselben Achse vereinigt, so heisst das grössere Zahnrad das kleinere Getriebe. Den Hebelgesetzen entsprechend ist die Kraft so oft in der Last enthalten, als das Produkt der Radien der Getriebe im Produkt der Radien der Räder. Weil ein Zahn des Rades immer nur einen des Getriebes weiterschiebt, muss das letztere während einer Umdrehung des Rades so oft rotiren, als die Anzahl seiner Triebstöcke in derjenigen der Zähne enthalten ist. Daher stehen die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Räder in umgekehrtem Verhältniss zur Anzahl der Zähne. Da in ähnlicher Weise die Geschwindigkeit des letzten Rades sich zu der des ersten verhält, wie das Produkt der Anzahl der Zähne aller Räder zum Produkt der Anzahl der Triebstöcke aller Getriebe, so leuchtet ein, wie in der durch Räderwerke geschehenden Bewegungsübertragung eine langsame Umdrehung am einen Ende am



ändern eine beträchtliche Geschwindigkeit hervorrufen kann. — Der grössere Halbmesser des Rades an der Welle kann auch durch einen Kurbelarm ersetzt werden. Eine Verbindung von gezählter Stange, Zahnrad und Kurbel liegt in der einfachen und zusammengesetzten Winde vor. Bei ersterer hebt oder senkt das mittels der Kurbel gedrehte Zahnrad die gezählte Stange und mit ihr die Last, in der sie so oft enthalten ist, als die Kurbellänge im Halbmesser des Rades. Nach einer vollen Kurbelumdrehung ist die Stange um eine Linie aufwärts oder abwärts gerückt, deren Länge dem Umfang des Zahnrades gleicht. An der zweiten dreht die Kurbel ein Getriebe, dieses ein Zahnrad und hiemit das zweite demselben angehörige Getriebe, dessen Triebstöcke in die Stange eingreifen. Hier ist die Kraft der sovielte Theil der Last, als das Produkt der Getriebsradien im Produkt der Kurbellänge und des Zahnradhalbmessers enthalten ist. Für eine Umdrehung des Rades, wodurch die Stange und die Peripherielänge des eingreifenden Getriebes gehoben wird, muss die Kurbel und ihr Getriebe so viele Umdrehungen machen, als der Radius des Kurbelgetriebes im Halbmesser des grossen Zahnrades enthalten ist.

**11.** Eine Kreisscheibe, welche um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse drehbar und am Umfang mit einer Rinne versehen ist, heisst Rolle. Ist ihre Lage im Raum so fixirt, dass sie nur um ihre Achse rotiren kann, so wird sie feste Rolle genannt. Weil der Stütz- und Drehpunkt im Centrum, die Angriffspunkte der Kräfte aber an den Enden des horizontalen Durchmesser liegen, so ist das Ganze eigentlich ein zwei- und gleicharmiger Hebel, dess-

Fig. 11.



halb nicht zur Ersparung von Kraft, sondern nur zur Umänderung der Bewegungsrichtung geeignet. — Ist aber die Rolle (Fig. 11) so aufgehängt, dass die Drehungsachse c von der daran befestigten Last P abwärts gezogen wird, während die eine Seite a der Peripherie befestigt erscheint, an der andern b aber die Kraft K durch Vermittelung der oberen Rolle aufwärts zieht, so liegt ein einarmiger Hebel vor, dessen Stütz- und Drehpunkt der einseitige Punkt der Peripherie a ist, wovon die Last um den Radius ac, die Kraft aber um den Durchmesser ab entfernt ist. So wird, weil  $K \cdot ab = P \cdot ac$ ,

$$ab = 2ac$$

$$2K = P$$

$$K = \frac{1}{2}P$$

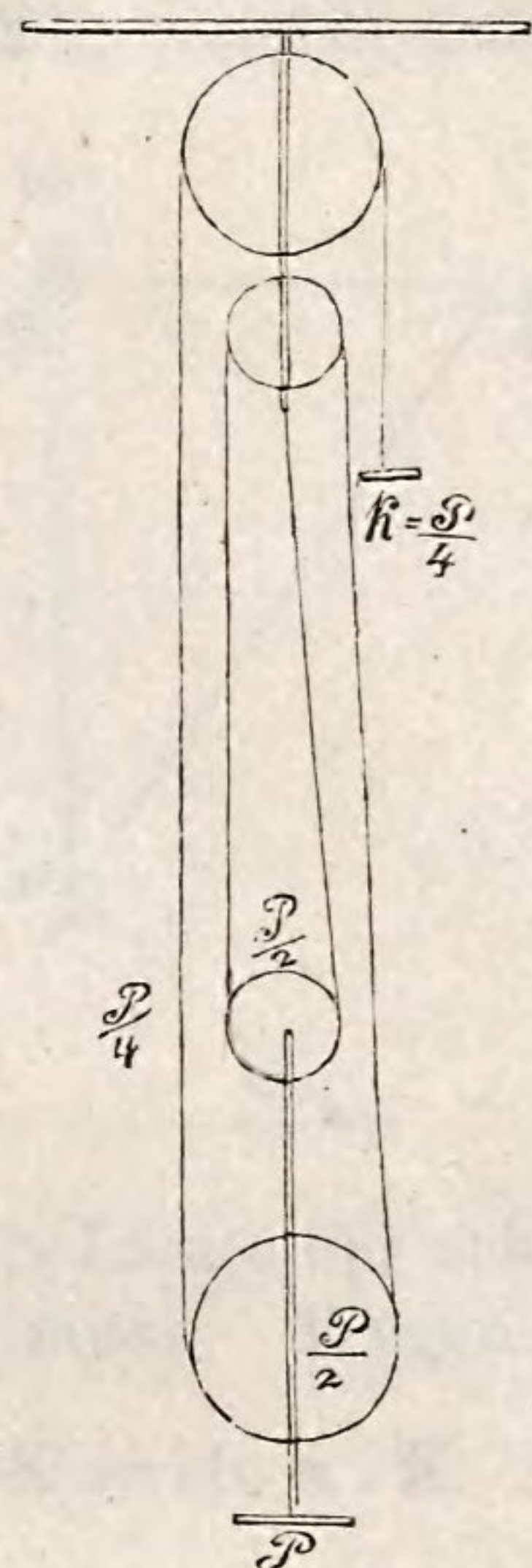
die Last durch eine Kraft gehoben, welche ihrer Hälfte gleicht. Damit aber die bewegliche Rolle mit der Last um eine Raumein-



heit gehoben werde, müssen die beiderseitigen Hälften des um ihren unteren Halbkreisumfang geschlungenen Seiles um dieselbe Raumgrösse verkürzt werden, wozu nöthig ist, dass die rechts von der festen Rolle herabhängende Seilabtheilung sich um den doppelten als Einheit genommenen Weg verkürzt. Somit beträgt an der gegebenen Vorrichtung die Geschwindigkeit der Kraft das Doppelte der der Last zu ertheilenden Schnelligkeit. — Sind die Seilabtheilungen nicht parallel, so ist die auf den Drehpunkt wirkende Resultante als Diagonale des Parallelogrammes aufzufinden, dessen Seiten der Grösse nach durch die Seitenkräfte, der Richtung nach durch den Verlauf der Seile bestimmt sind. — Die systematische Verbindung mehrerer beweglicher und fester Rollen heisst Flaschenzug. Der gemeine Flaschenzug besteht aus zwei Gehäusen, von denen das obere die festen Rollen neben- oder untereinander, das untere in entsprechender Anordnung gleichviel bewegliche Rollen enthält. Seillauf und Vertheilung der Last erhellt aus Figur 12. Man sieht, dass jede der  $n$  beweglichen Rollen den  $n^{\text{ten}}$  Theil der Last übernimmt und diese Bürde an die beiderseits aufsteigenden Seiläste in zwei gleichen Summanden vertheilt.

Sonach  $K = \frac{P}{2n}$  d. h. man findet die Kraft, welche am gemeinen Flaschenzug der Last das Gleichgewicht hält, wenn man diese Last durch die doppelte Anzahl der beweglichen Rollen, oder durch die Anzahl der Seile des beweglichen Gehäuses dividirt. Damit die Last um eine bestimmte Strecke gehoben werde, muss sich jedes der zu den  $n$  Rollen des unteren Gehäuses gehörigen Seile um dasselbe Stück verkürzen, wozu erfordert wird, dass der Angriffspunkt der Kraft  $2n^{\text{mal}}$  diesen Weg abwärts mache. — Im *Potenzflaschenzug* ist eine feste Rolle mit mehreren beweglichen verbunden. Die unterste bewegliche Rolle vertheilt ihre Last  $P$  (siehe Fig. 13 folgende Seite) auf die beiden Seilschenkel  $a$  und  $b$ , wovon der erste durch Befestigung am Tragbalken  $mn$  im Gleichgewicht erhalten wird. Die Last von  $b = \frac{1}{2} P$  zieht an der nächsten beweglichen Rolle, welche in derselben Art dem Seile  $d \frac{1}{4} P$  überlässt. Diess wird von der nächsten beweglichen Rolle halbirt u. s. f., bis das über die feste Rolle laufende Seil bei  $K$  mit einer Kraft gespannt sein muss, welche man findet, wenn man die Last durch die sovielte Po-

Fig. 12.



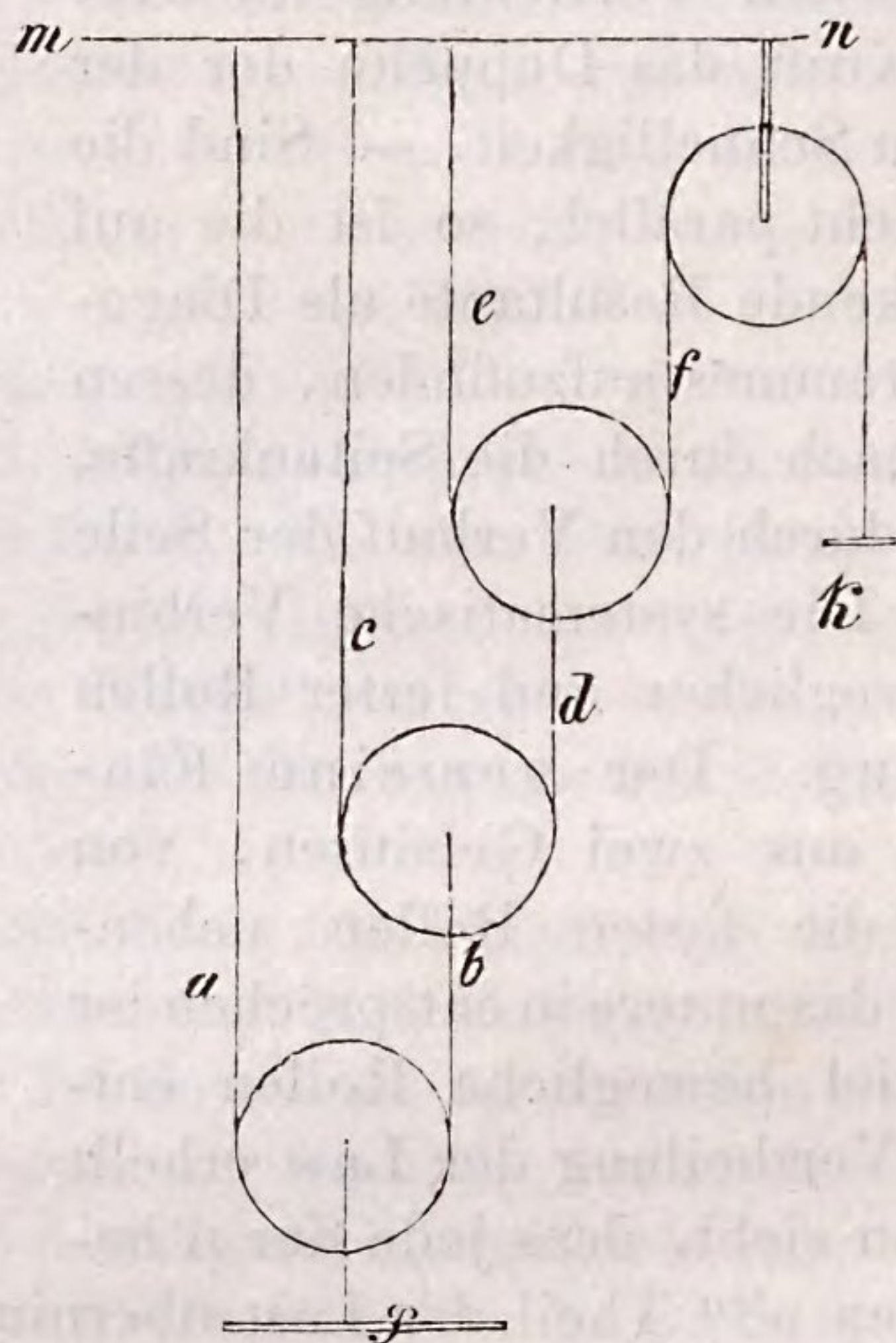


tenz von 2 dividirt als bewegliche Rollen vorhanden sind  $K = \frac{P}{2^n}$ .

Weil, sobald  $n > 2$

$$2^n > 2n \text{ folglich } \frac{P}{2^n} < \frac{P}{2n}$$

Fig. 13.



so leistet der Potenzflaschenzug, von drei beweglichen Rollen angerechnet, mit derselben Kraft mehr, als der gemeine Flaschenzug von gleichviel beweglichen Rollen; wozu noch kommt, dass dieser an Stelle der dem Potenzflaschenzug genügenden Einen festen Rolle mehrere braucht. Dagegen muss zur Hebung der Last um 1' das Seil a um 1' kürzer werden, b soll selbst um diesen 1' steigen, und dazu den von a herüberrollenden 1' übernehmen, so dass in demselben Moment die zweite bewegliche Rolle um 2' in die Höhe rückt, wenn der verlangte Effekt zum Vorschein kommen soll. Dadurch wird c um 2' also d um 4' verkürzt, die dritte Rolle also um 4' gehoben, was voraussetzt, dass der Angriffspunkt der Kraft K der 8' betragenden Verkürzung des Seiles f entsprechend ebenfalls um 8' abwärts gehe, was für Hebungen überhaupt die die Anwendbarkeit des Potenzflaschenzuges sehr beschränkende Forderung ergibt, dass der Weg der Kraft  $2^n$  mal so gross sei, als der Weg der Last.

**12.** Ist bc (siehe Fig. 14 folgende Seite) eine gegen die von jedem freien Wasserspiegel repräsentirte Horizontalfläche unter dem Winkel x geneigte schiefe Ebene von der Höhe ab und wirkt eine Kraft von der Grösse und Richtung np, welche zu ac senkrecht wäre



unter einem beliebigen Winkel gegen  $bc$ , so kann man  $np$  zerlegen in die beiden Seitenkräfte  $nm$  und  $mp$ , wovon  $nm$  senkrecht zu  $bc$  durch die als ausreichend vorausgesetzte Festigkeit der schiefen Ebene aufgehoben oder im Gleichgewicht gehalten wird, während  $mp$  die in der Richtung des Pfeiles wirksame freie Kraft vorstellt, welcher durch

Fig. 14.

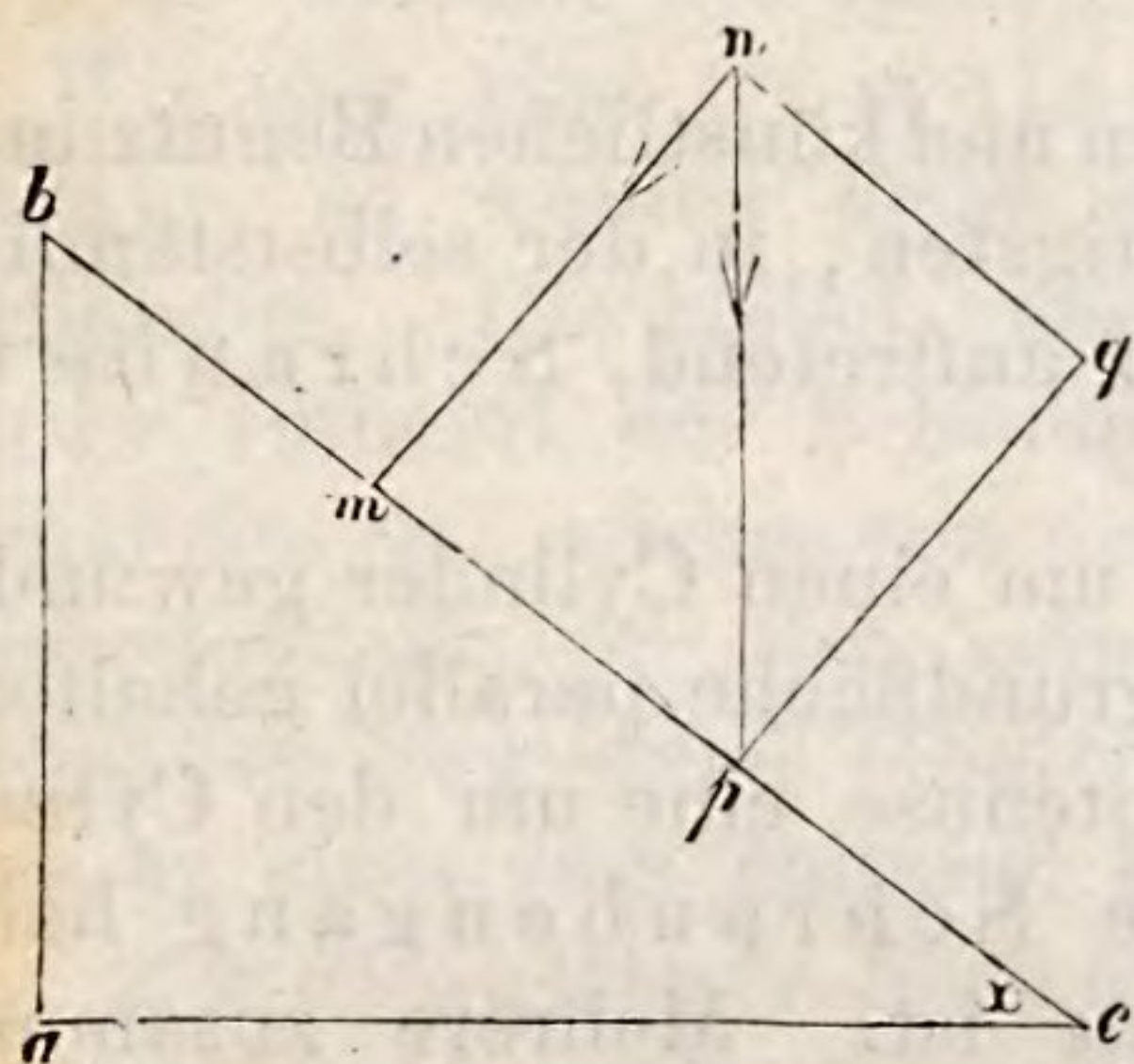
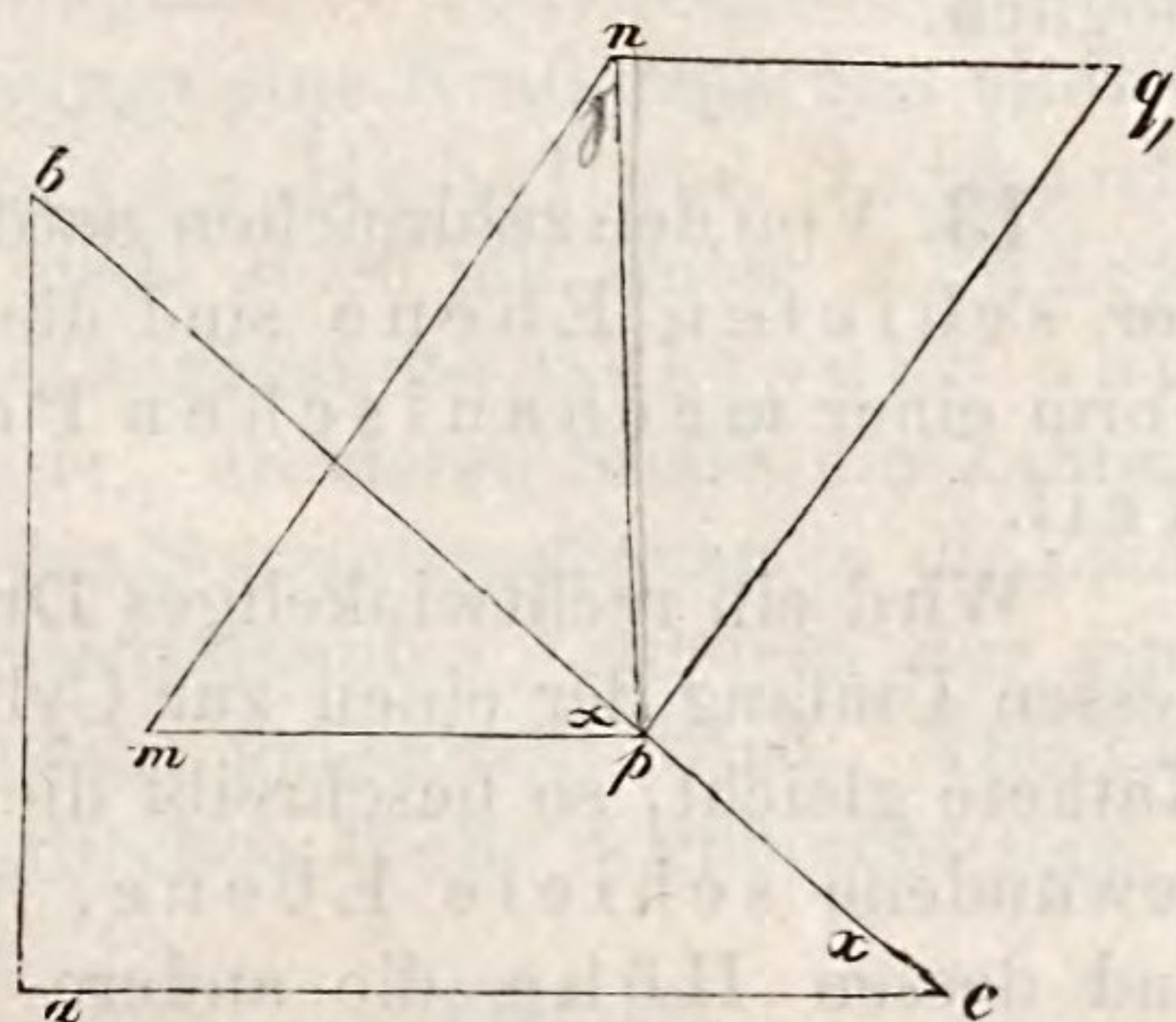


Fig. 15.



eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete mit der Länge der schiefen Ebene parallele Kraft entgegengewirkt werden muss. Wegen

$$\triangle abc \sim mnp \quad ab:bc = mp:np \quad k = \frac{ab}{bc} \cdot K = \sin x \cdot K$$

$$= k : K$$

d. h. die freie Kraft ist in der ursprünglichen so oft enthalten, als die Höhe der schiefen Ebene in deren Länge, oder sie ist dem Sinus des Elevationswinkels  $x$  proportional. — Die senkrecht zur schiefen Ebene wirkende Seitenkraft ist niedergelegt in der Relation

$$\frac{mn}{np} = \frac{ac}{bc}, \text{ woraus } mn = K \frac{ac}{bc} = K \cos x. \text{ Man kann aber}$$

auch  $K$  nach Art der Fig. 15 so zerlegen, dass die freie Kraft  $k$  parallel zur Horizontalprojection  $ac$  der schiefen Ebene wird. Weil wieder  $\triangle abc \sim mnp$

$$ab:ac = mp:np$$

$$= k : K$$

so ist in diesem Fall die freie Kraft in der ursprünglichen so oft enthalten, als die Höhe der schiefen Ebene in deren Horizontalprojection. Bezüglich des Elevationswinkels

$$\text{ist } \frac{ab}{ac} = \tan x, \text{ folglich } k = \frac{ab}{ac} \cdot K = \tan x \cdot K, \text{ und für die zur}$$

$$\text{schiefen Ebene senkrechte Seitenkraft } \frac{mn}{np} = \frac{bc}{ac} \quad mn = \frac{bc}{ac} K =$$

$$\sec x \cdot K. \text{ Die beiden Formeln } \sin x \cdot K = k \text{ und } \tan x \cdot K = k$$

$$\text{lassen sich zusammenfassen in die allgemeinere } \frac{\sin x}{\cos x} K = k, \text{ worin}$$



die neue Grösse  $\alpha$  den beliebigen Winkel bedeutet, welchen die freie Kraft  $k$  mit der schiefen Ebene machen kann; denn wird dieser Winkel wie im ersten Fall Null, so ist  $\cos . \alpha = 1$  und folgt wie oben  $\sin x . K$ ; im zweiten Fall ist  $\wedge \alpha = x$ , mithin  $\frac{\sin x}{\cos x} K = \tan x . K$ ; für  $\alpha = 90^\circ$ , endlich wird  $\cos . \alpha = 0$ , der Werth für  $k$  also unmöglich.

**13.** Von den zahlreichen natürlichen und künstlichen Benutzungen der schiefen Ebene sind die wichtigsten, in der selbstständigen Form einer mechanischen Potenz auftretend, Schraube und Keil.

Wird ein rechtwinkeliges Dreieck um einen Cylinder gewunden, dessen Umfang der einen zur Cylindergrundfläche parallel gehaltenen Kathete gleicht, so beschreibt die Hypotenuse eine um den Cylinder gewundene schiefe Ebene, welche Schraubengang heisst, und dessen Höhe die andere Kathete ist. Mehrere zusammenhängende Schraubenlinien bilden eine Schraubenspindel, für deren Anwendung zum Heben oder Pressen die Gegenwart der Schraubenmutter nöthig ist, an welcher den Erhebungen der Spindel Vertiefungen und umgekehrt entsprechen. Wird am Cylindermantel längs der Schraubenlinie statt des ein scharfes Schraubengewinde erzeugenden Dreiecks ein Viereck herumgeführt, dessen Höhe die halbe Weite eines Schraubenganges sein kann, so entsteht ein flaches Schraubengewinde. — Bedeutet  $h$  (die vertikale Kathete des erzeugenden Dreieckes) die Höhe eines Schraubenganges,  $r$  den Radius der Spindel, so ist  $2 r \pi$  der Umfang des Cylinders oder die Horizontalkathete. Sind ferner  $n$  Schraubengänge vorhanden, so drückt die Last  $P$  auf jeden als  $\frac{1}{n} P$ , indem sie sich auf sämtliche gleichförmig vertheilt. Die Kraft  $K$ , welche den Schraubenkopf horizontal zu drehen strebt, wirkt parallel mit der Horizontalprojektion der schiefen Ebene, als welche jeder Schraubengang erscheint, und ist demnach  $K = P \tan x$ , worin  $x$  die Neigung des Schraubenganges gegen die Horizontalgrundfläche des Cylinders misst.  $\tan x = \frac{h}{2 r \pi}$

$$K = \frac{h P}{2 r \pi} \quad K . 2 r \pi = h . P \quad K : P = h : 2 r \pi \text{ d. h.}$$

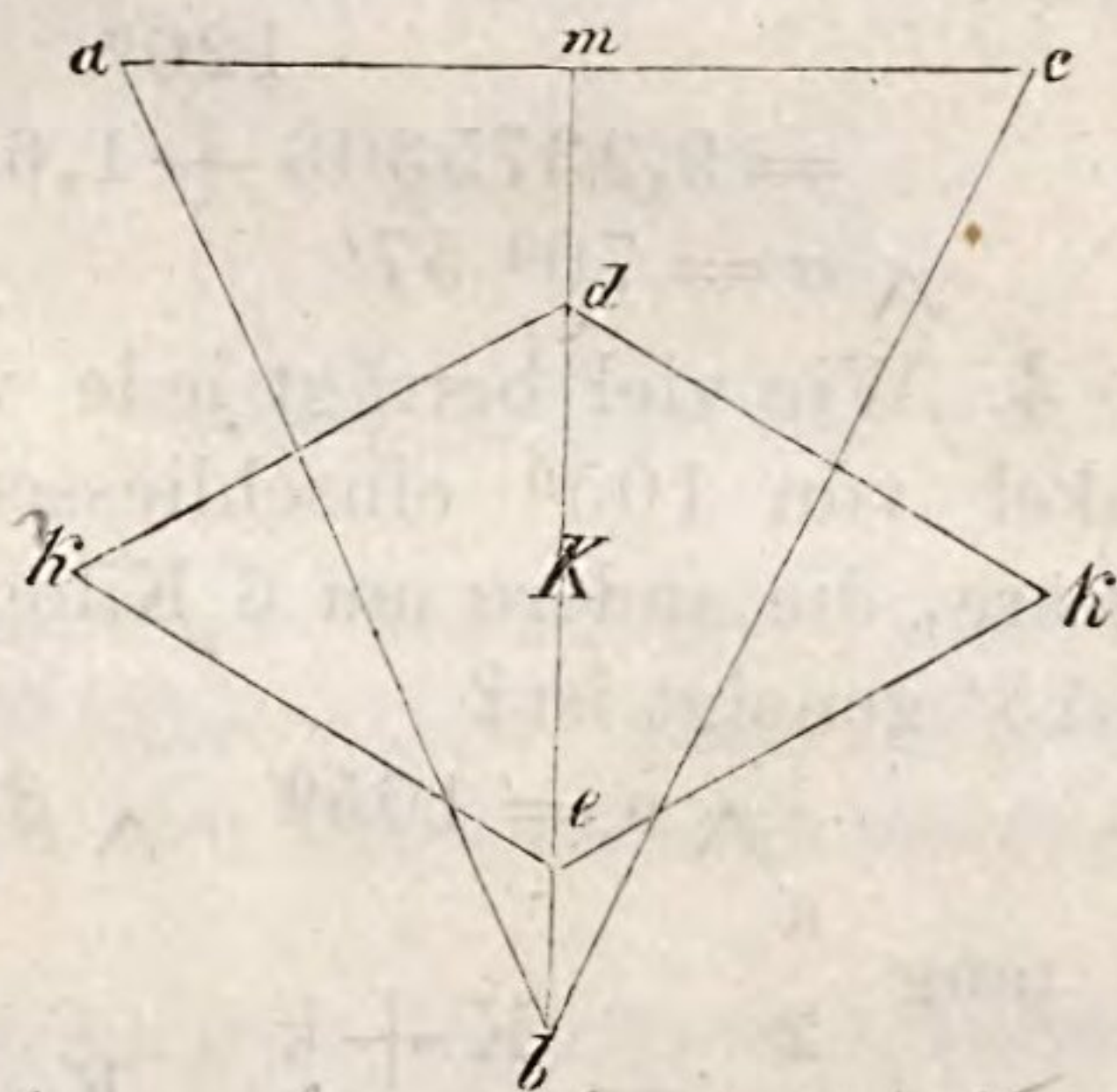
die an der Schraube wirkende Kraft ist in der damit aufgewogenen Last so oft enthalten, als die Höhe (Weite) eines Schraubenganges im Umfang des Schraubencylinders. Demnach erscheint es vortheilhaft, an dicken Schraubencylindern sehr feine



Schraubengänge anzubringen. Doch ist nicht zu übersehen, dass jede vollständige Umdrehung die Schraube nur um die Schraubengangweite befördert, also die Bewegung eine um so langsamere, die aufzubietende Geschwindigkeit eine um so grössere ist, je enger die Schraubengänge im Verhältniss zum Cylinderumfang sind. — Gewöhnlich ist der Angriffspunkt der Kraft mittels eines durch den Schraubenkopf gesteckten Hebels vom Drehpunkt so weit wegverlegt, dass nach der Theorie des Hebels neuerdings eine Krafterparniss eintritt. — Wie hier eine Combination von Hebel und Schraube vorliegt, so werden nicht selten beide noch mit einem Zahnrad verbunden. Die hiebei verwendete sogenannte Schraube ohne Ende entbehrt der Schraubenmutter, an deren Stelle ein Zahnrad vorhanden ist, welches von der mit den Schraubengängen in die Zähne eingreifenden, für sich keiner fortschreitenden, sondern nur einer drehenden Bewegung fähigen Schraube umgedreht wird. Die Last kann an einer zum Zahnrad concentrischen Welle angebracht sein.

Zweischiefe Ebenen sind im Keil verbunden. Soll derselbe in der Richtung  $mb$  mit der scharfen Kante  $b$  eindringen, so wirken diesem Bestreben die senkrecht zu den Seitenflächen ( $ab = bc$ ) vorzustellenden Kohäsionskräfte des Körpers ( $K = k$ ) entgegen. Deren nach dem Kräfteparallelogramm gefundene Mittelkraft  $K = de$  hält ihnen das Gleichgewicht und treibt, wenig vermehrt, den Keil hinein.

Fig. 16.



Wegen  $\triangle abc \sim \triangle de K$  steht  $ac:ab = de:dK$   
 $= K:K$

wonach die zum Eintreiben des Keiles beanspruchte Kraft im Seitendruck so oft enthalten ist, als die Breite der Keilbasis in der Länge seiner Seitenfläche.

### Beispiele.

1. Wie gross ist die Mittelkraft zweier Kräfte von 40 und 30 Pfund, deren Richtungen einen Winkel von  $40^\circ$  bilden?

$$K = \sqrt{K^2 + k^2 + 2 K \cdot k \cdot \cos \alpha}$$

$$= \mathcal{V}_{1600+900+2400.0,76604} = \mathcal{V}_{4338,496} = 65,867 \text{ Pfd.}$$

2. Welche Resultante gehört zu zwei Componenten, deren grössere durch die Zahl 25 ausgedrückt wird, wenn man weiss, dass



der Winkel beider Componenten  $130^\circ$ , derjenige zwischen der Resultanten und der kleineren Componenten aber  $81^\circ 18'$  beträgt?

$$K = \frac{\sin a}{\sin \alpha} K = 19,374$$

$$\begin{aligned} \log K &= \log \sin 130^\circ - \log \sin 81^\circ 18' + \log 25 \\ &= 9,8842540 - 9,9949740 + 1,3979400 \\ &= 1,28722. \end{aligned}$$

3. Welche Winkel bilden drei Kräfte untereinander, von denen die grössere Seitenkraft 49,989, die kleinere 40, die Mittelkraft 45,8 zum Maass hat?

$$\begin{aligned} \cos b &= \frac{K^2 + k^2 - K^2}{2 K \cdot k} = \frac{2499,9 + 1600 - 2097,64}{3999,12} = \frac{2002,26}{3999,12} \\ &= 0,5 \dots \end{aligned}$$

$$\angle b = 60^\circ \quad \angle a = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \text{Winkel beider Componenten.}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a \cdot K}{K}$$

$$\log \sin : \alpha = \log \sin : a + \log K - \log K$$

$$= 9,9375306 + 1,6988744 - 1,6608655 = 9,9755395$$

$$\angle \alpha = 70^\circ 57'$$

$$\angle \gamma = a - \alpha = 49^\circ 3'$$

4. Wie viel beträgt jede von zwei Seitenkräften, welche einen Winkel von  $105^\circ$  einschliessen, wenn die Mittelkraft gegen die grössere, die andere um 6 Kilogramm übertreffende Seitenkraft unter  $44^\circ 15'$  geneigt ist?

$$\angle a = 105^\circ \quad \angle \beta = 44^\circ 15' \quad K - k = 6$$

$$\frac{\tan \frac{a}{2}}{\tan \frac{a - 2\beta}{2}} = \frac{K + k}{K - k} \quad K + k = \frac{\tan 52^\circ 30'}{\tan 8^\circ 15'} \cdot 6 = \frac{1,3032}{0,1449} \cdot 6$$

$$\begin{aligned} &= 54 \quad \left. \begin{array}{l} K = 30 \\ K - k = 6 \end{array} \right\} k = 24 \quad \text{Kilogramm.} \end{aligned}$$

5. Zwei Kräfte  $K = 7$   $k = 5$  wirken in paralleler und gleicher Richtung auf die Endpunkte einer festen Linie von  $8'$  Länge, Grösse und Angriffspunkt der Resultanten?

$$\begin{aligned} K + k &= 12 & Kx &= ky & 7x &= 5y & x &= \frac{5}{7}y = 3\frac{1}{3} \\ x + y &= 8 & \frac{5}{7}y + y &= 8 & y &= 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

6. Auf ein System materieller Punkte wirken an zwei verschiedenen Angriffstellen zwei Kräfte von beziehungsweise 34 und 20 Kilogramm, die einen Winkel von  $70^\circ$  mit einander bilden. Dieselben sind von einem ausserhalb des fraglichen Kräftesystems gelegenen Punkt 4 Meter und 1 Meter entfernt. Hieraus ist Grösse, Richtung und Ort der Mittelkraft zu berechnen.



In Figur 2 ist  $K = ac = 34$

$$k = ab = 20$$

$$\angle bac = a = 70^\circ$$

$$K = \sqrt{K^2 + k^2 + 2 K \cdot k \cdot \cos a} = \sqrt{1156 + 400 + 1360 \cdot 0,34202} \\ = 44,96 \text{ Kilogramm.}$$

$$\sin bad = \frac{K \sin a}{K} \quad \log \sin : bad = \log 34 + \log \sin 70 - \log 44,96 \\ = 1,5314789 + 9,9729858 - 1,6528263 \\ = 9,8516220 \quad \angle bad = 45^\circ 17'$$

Ferner ist das statische Moment der Mittelkraft  $K \cdot x$  gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte

$$34 \cdot 1 + 20 \cdot 4 \quad \text{folglich } x = \frac{114}{44,96} = 2,536 \text{ M.}$$

7. Zwei Männer, deren Tragkräfte sich verhalten wie 5 zu 8, sollen an einer 10' langen Stange eine Last von 1000 Pfund tragen. Wie ist sie nach Raumlänge und Gewicht zu vertheilen?

$$5x = 8(10 - x) \quad 6 \frac{2}{13} \quad Z = 3 \frac{11}{13} (1000 - z) \\ x = \frac{80}{13} = 6 \frac{2}{13} \quad 10z = \frac{50000}{13} \quad z = 384 \frac{8}{13} \\ 10 - x = 3 \frac{11}{13} \quad 1000 - Z = 615 \frac{5}{13}$$

8. An einem 9 Meter langen Arm eines Winkelhebels wirkt eine Kraft von 99 Kilogramm unter einem Winkel von  $30^\circ$  gegen denselben. Welchen Winkel zum andern Hebelarm von 5 Meter Länge macht eine Kraft von 100 Kilogramm?

$$\text{Nach Fig. 9 ist } K \cdot ac \sin \alpha = k \cdot bc \sin \beta \quad \log 99 = 1,9956352 \\ \sin \alpha = \frac{99 \cdot 9 \cdot \sin 30^\circ}{100 \cdot 5} \quad \log 9 = 0,9542425 \\ \log \sin : 30^\circ = 9,6989700 \\ \angle \alpha = 62^\circ 59' \quad \frac{12,6488477}{\log 500 = 2,6989700} \\ 9,9498777$$

9. Welche Last lässt sich mit einer durch 80 ausgedrückten Kraft an einem Flaschenzug heben, dessen bewegliche Flasche 24 Pfund wiegt und in 7 Seilen hängt?

$$80 = \frac{x + 24}{7} \quad x = 560 - 24 = 536.$$

10. Wie gross ist die horizontalwirkende Kraft, welche auf einer  $26^\circ$  gegen den Horizont geneigten Ebene einer Last von 600 Pfund das Gleichgewicht hält?



$$K = 600 \cdot \text{tang. } 26^\circ \\ = 292,64$$

$$\begin{array}{r} \log 600 = 2,7781513 \\ \log \text{tg } 26^\circ = 10,0761865 \\ \hline 12,8543378 \\ 10 \\ \hline 2,8543378 \end{array}$$

11. Welche Last wird von einer Kraft = 1312,5 Kilogramm im Gleichgewicht gehalten, wenn die Krafrichtung gegen die schiefe Ebene  $3^\circ 17'$ , die Elevation der letzteren aber  $14^\circ 25'$  beträgt?

$$K = \frac{\cos \alpha}{\sin x} k \quad \log K = \log \cos : 3^\circ 17' + \log 1312,5 - \log \sin 14^\circ 25' \\ = 5263$$

$$\begin{array}{l} 9,9992865 \\ 9,3961499 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,6031366 \\ 3,1180968 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 3,7212334$$

12. Welchen Elevationswinkel hat eine schiefe Ebene, auf welcher eine mit ihrer Länge parallele Kraft von 2498 Kilogramm einer Last von 8316 Kilogramm das Gleichgewicht hält?

$$k = 2498 \quad K = 8316 \quad \sin x = \frac{k}{K} \\ \log \sin x = 3,3975924 - 3,9199145 = -0,5223221 \\ + 10 \\ \wedge x = 17^\circ 28' 50,6'' \quad \frac{9,4776779}{9,4776779}$$

13. An einer Schraube von der Gangweite  $0,5''$  und dem Spindelradius  $3''$  wirkt mittels eines durch den Schraubenkopf gehenden Hebelarmes von  $12''$  Länge eine zu berechnende Kraft gegen eine Last von 113,094 Pfund.

$$K = \frac{P \cdot h}{2 r \pi} = \frac{113,094}{37,698} = 3$$

$$3 \cdot K = 12 x$$

$$9 = 12 x \quad x = \frac{3}{4} \text{ Pfd.}$$

### III.

#### Die Schwere.

1. Jeder sich selbst überlassene Körper bewegt sich in einer zur idealen Erdoberfläche senkrechten Richtung gegen dieselbe, strebt also, da jede solche Linie als Verlängerung des Erdradius gilt, zum



Mittelpunkt der Erde. Man erklärt daher diesen als den Sitz einer übrigens sämtlichen materiellen Theilen des Erdkörpers eigenthümlichen Kraft der Anziehung, welche sich gegen alle Stoffe gleichmässig äussert. Astronomische Erfahrungen ergeben, dass die Anziehung nicht nur eine Eigenschaft der irdischen Materie sei, sondern allen im Weltraum aufgefundenen Körpern zukomme und an sämtlichen nach denselben Regeln sich erweise. Newton sprach das Weltgesetz der Gravitation aus, dass die Anziehungskräfte in geradem Verhältniss zu den Massen der betheiligten Körper, aber in verkehrtem Verhältniss zu den Quadraten ihrer Entfernungen stehen.

2. Die Anziehung der Erde auf die ihrem Attractionsrayon verfallenen Körper äussert sich, sofern die gegen den Mittelpunkt strebende Bewegung derselben unmöglich ist, als ein Druck auf die Unterlage, oder als ein Zug in der Aufhängungsrichtung. Beide sind unter sonst gleichen und normalen Umständen einander gleich und heissen das Gewicht des Körpers. Dieses Gewicht, als absolutes, ist eine Function der Anziehung und wechselt für den nämlichen Körper, je nach den Attractionsverhältnissen, enthält aber ausserdem einen konstanten, dem Körper selber immanenten Faktor, welchen man erhält, indem man das Gewicht  $P$  durch die Anziehung  $A$  dividirt. Der Quotient  $\frac{P}{A} = M$  heisst

Masse und ist als die Summe der dem Körper eigenthümlichen materiellen Theilchen aufzufassen. Je mehr derselben in dem nämlichen Raumumfang zusammengedrängt sind, desto grössere Masse schreibt man dem Körper zu, so dass die Massen den in den gegebenen Körpern enthaltenen Stoffmengen proportional gelten. — Die Beziehung der Masse zum Volumen gibt den Begriff der Dichte. In Körpern, deren Atome vollkommen gleichmässig vertheilt sind, ist die Dichte nichts Anderes, als die in der Volumeneinheit enthaltene Masse. In nicht homogenen Körpern ist zwar die Dichte an verschiedenen Punkten verschieden, aber innerhalb jedes unendlich kleinen Rayons kann sie dem Verhältniss des Massenelementes zum Volumenelemente gleichgesetzt und daraus als eine mittlere für den ganzen Körper berechnet werden. Die Zahlen, welche die Verhältnisse der Dichten der Stoffe zu der als Einheit gewählten Dichtigkeit des Wassers — oder für Gase der Luft — angeben, heissen specifische Gewichte. Weil für die auf Erden der Betrachtung unterzogenen Körper die Erdanziehung ohne Fehler als konstant betrachtet werden darf, ist man berechtigt, die Massen den absoluten Gewichten proportional zu setzen und das specifische Gewicht,  $Sp$ , als den Quotienten des Volums  $V$  in das absolute Gewicht  $P$  zu bezeichnen.



$$S_p = \frac{P}{V} \quad V = \frac{V}{S_p} \quad P = V \cdot S_p.$$

3. Sofern man die von der Schwere oder Attraction herührenden, die materiellen Punkte eines Körpers in demselben Sinn abwärts ziehenden Parallelkräfte als gerade Linien vorstellt, ist die ihnen parallele und ihrer Summe gleiche Resultante das Gewicht des Körpers. Der Punkt, in welchem diese Resultante das System der materiellen Punkte, das den Körper repräsentirt, angreift, und in welchem man sich das Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, heisst Schwerpunkt, die durch ihn gehende Gerade, welche senkrecht zur Erdoberfläche herabfällt, Schwerlinie, und die diesen Punkt enthaltende Vertikalebene Schwerebene.

Der Schwerpunkt eines Körpers, dessen Begrenzungselemente in ihrer Gesammtheit eine konvexe Oberfläche darstellen, liegt im Innern, weil der Angriffspunkt der letzten Resultanten ebenso in's Innere fällt, wie die Angriffspunkte der successiv auftretenden Resultanten, welche man erhält, wenn man von einem inneren Punkt ausgehend die Parallelkräfte, als welche die Attractionen der den Körper konstituierenden materiellen Punkte gelten, allmähig zusammensetzt. Theilt man den Körper in unendlich kleine Volumenelemente, so trägt jedes seinen Schwerpunkt in sich. Da die Summe aller dieser Elementargewichte nichts anderes als das Gesamtgewicht des Körpers bedeutet, so ergibt sich bezüglich einer allgemeinen Schwerpunktbestimmung der Satz: das Produkt aus dem Gewicht eines Körpers in die Entfernung seines Schwerpunktes von einer beliebigen Ebene bildet den Grenzwert der Summe von allen Produkten, welche entstehen, wenn man das Gewicht jedes einzelnen Körperelementes mit der Entfernung eines seiner Punkte von jener Ebene multiplicirt.

Der Schwerpunkt homogener Körper hängt von deren geometrischen Eigenthümlichkeit ab. In stereometrisch regulären Körpern fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammen, in symmetrischen, bei denen jedem Punkte auf der einen Seite einer Mittelebene ein Punkt auf der andern Seite in gleichem Abstand entspricht, liegt er in jener Ebene.

Flächen und Linien im mathematischen Sinn haben nichts Körperliches an sich, also kein Gewicht, mithin keinen Schwerpunkt. Betrachtet man sie aber als Körper, in denen beziehungsweise eine oder zwei Dimensionen gegen die andere sehr zurücktreten, so gewinnt die Aufgabe, ihren Schwerpunkt aufzufinden, einen Sinn.

Der Schwerpunkt einer Geraden ist ihr Mittelpunkt.

Der Schwerpunkt eines Dreiecksumfanges kann in Bezug auf jede der drei Seiten aufgefunden werden. Bezeichnet man dessen Entfernung von  $AB = c$  mit  $x$ , so ist, wenn man sich die Masse des



ganzen Dreieckumfangs in  $c$  vereinigt denkt, sein statisches Moment  $(a + b + c) x$ , welches, sofern man  $c$  als Momentenachse gelten lässt, im Gleichgewicht gehalten wird durch die Summe der statischen Momente der beiden andern Seiten  $a \cdot EG + b \cdot FH$  in Bezug auf  $c$ ;

weil aber  $EG = FH = \frac{1}{2} h (CD)$  und  $\frac{h}{2} = \frac{\triangle}{c}$ , so kommt

$$(a + b + c) x = (a + b) \frac{h}{2}$$

$$x = \frac{h}{2} \frac{a + b}{a + b + c} = \frac{\triangle}{c} \frac{a + b}{a + b + c}$$

$$\text{Ebenso ist in Bezug auf } b \text{ oder } a, x = \frac{\triangle}{b} \cdot \frac{a + c}{a + b + c} = \frac{\triangle}{a} \frac{b + c}{a + b + c}$$

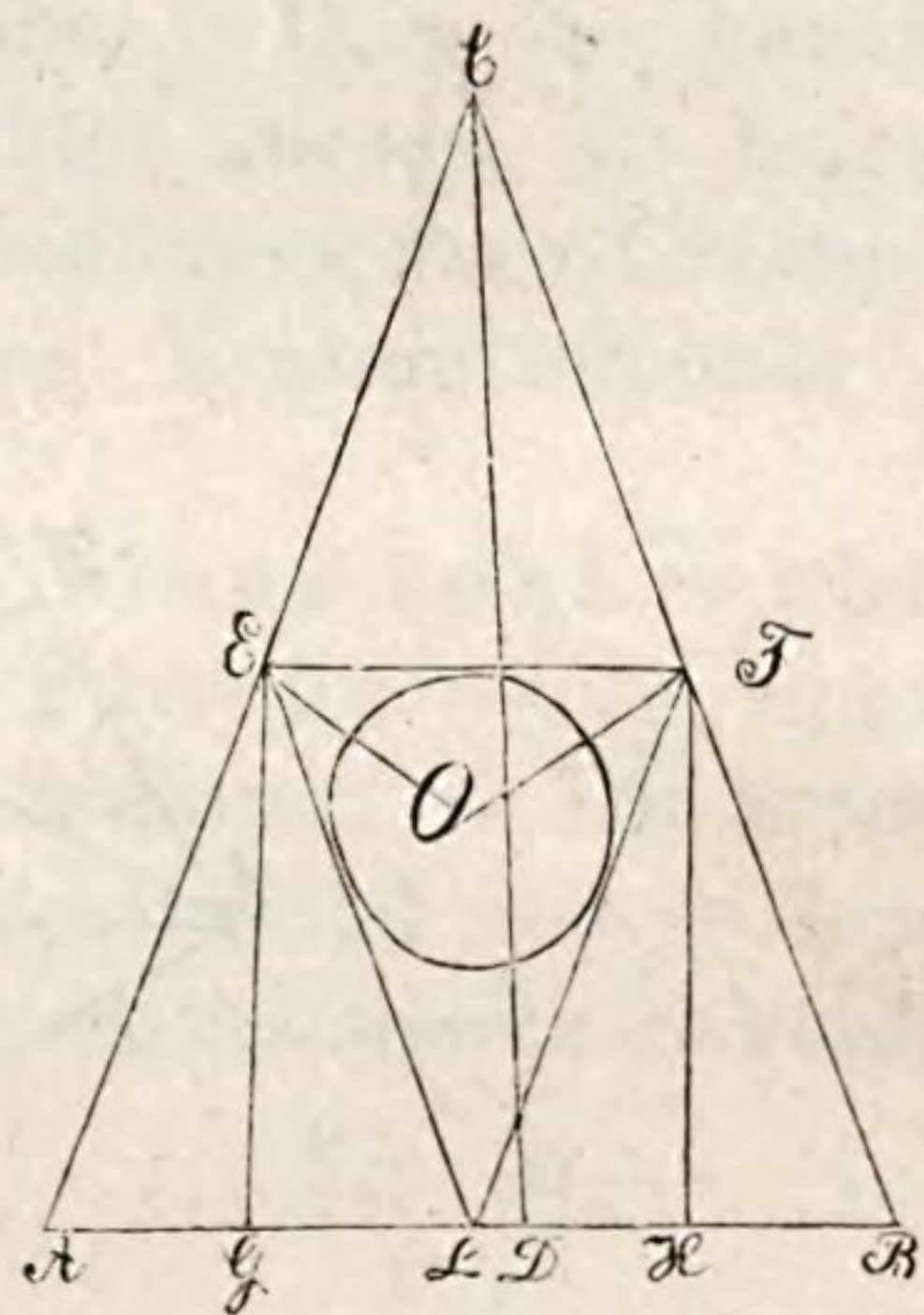
Durch Construction findet man diesen Schwerpunkt als Centrum des in das Dreieck EFL beschriebenen Kreises in  $O$ ,

wenn  $AE = CE = \frac{1}{2} b$ ,  $CF = BF = \frac{1}{2} a$ ,  $AL = BL = \frac{1}{2} c$ .

Die Centrumsentfernung des Schwerpunktes eines Kreisbogens  $\alpha$  vom Radius  $r$  und der Sehne  $a$  ist  $\frac{ar}{a}$ . Zerlegt man den Bogen  $AB$  in die unendlich kleinen Stücke  $AE$ ,  $EG$  u. s. f., so ist das statische Moment jedes als materieller Punkt anzusehenden Theilchens in Bezug auf den als Momentenachse betrachteten Diameter  $MN$   $AE \cdot AD + EG \cdot EF$  u. s. f. diese Summe von statischen Momenten aber gleich dem statischen Moment des Bogens  $\alpha x = AE \cdot AD + EG \cdot EF + \dots$ . Wegen unendlicher Kleinheit kann  $AE$ ,  $EG \dots$  als geradlinig gelten, und ist dann

$$\begin{aligned} \triangle AEO \sim ADC \quad AE : AO &= AC : AD \quad AD = \frac{r \cdot AO}{AE} \\ \triangle EGQ \sim EFC \quad EG : EQ &= EC : EF \quad EF = \frac{r \cdot EQ}{EG} = \frac{r \cdot OQ}{EG} \\ &\vdots \\ &\vdots \quad GL = \frac{r \cdot GV}{GU} = \frac{r \cdot QW}{GU} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fig. 17.





$$\begin{aligned}
 \alpha x &= A E \cdot \frac{r \cdot A O}{A E} + E G \cdot \frac{r \cdot O Q}{E G} + G U \cdot \frac{r \cdot Q W}{G U} + \dots \\
 &= r (A O + O Q + Q W + \dots) = r a \\
 x &= \frac{a r}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Fig. 18.

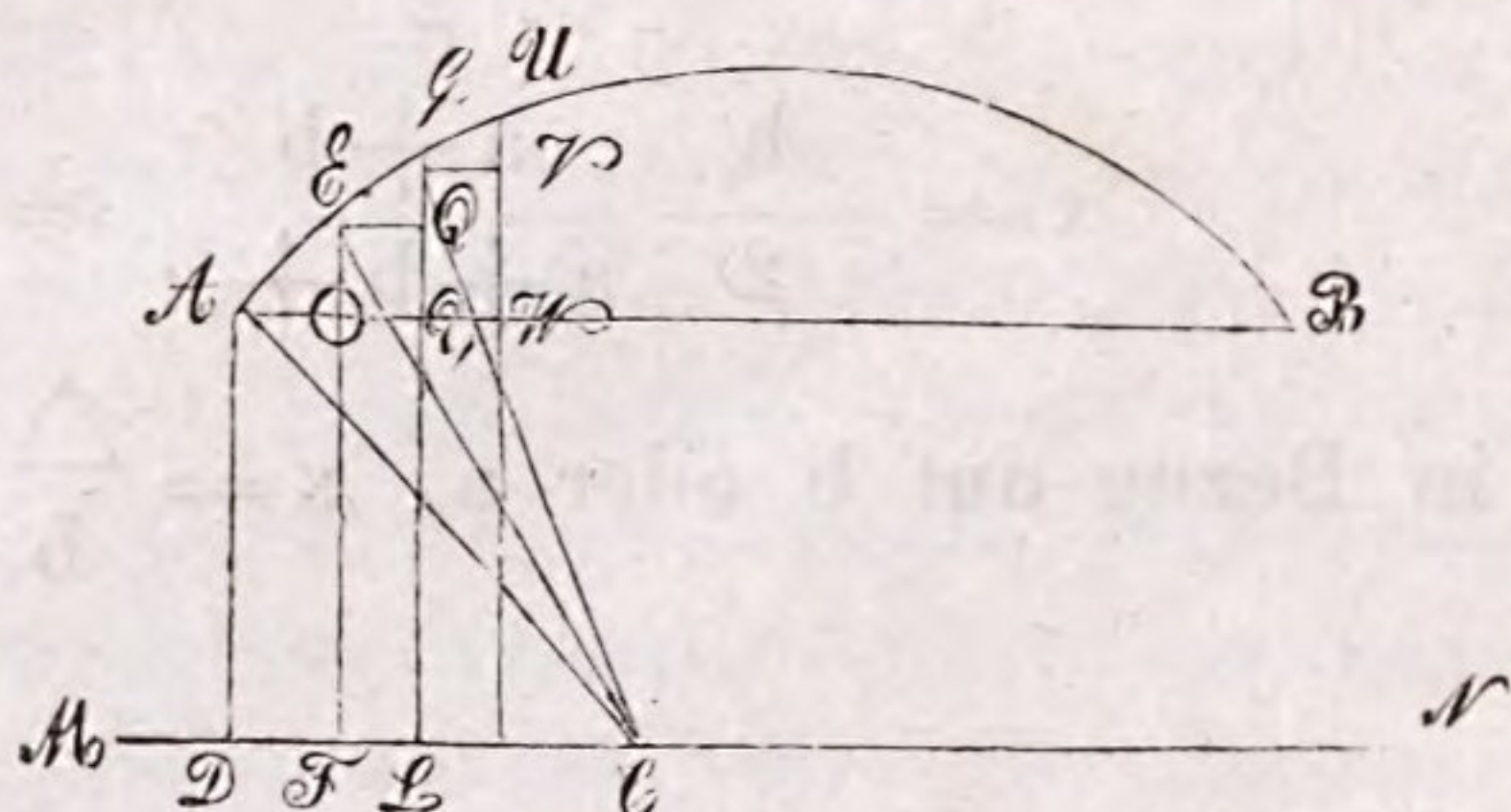
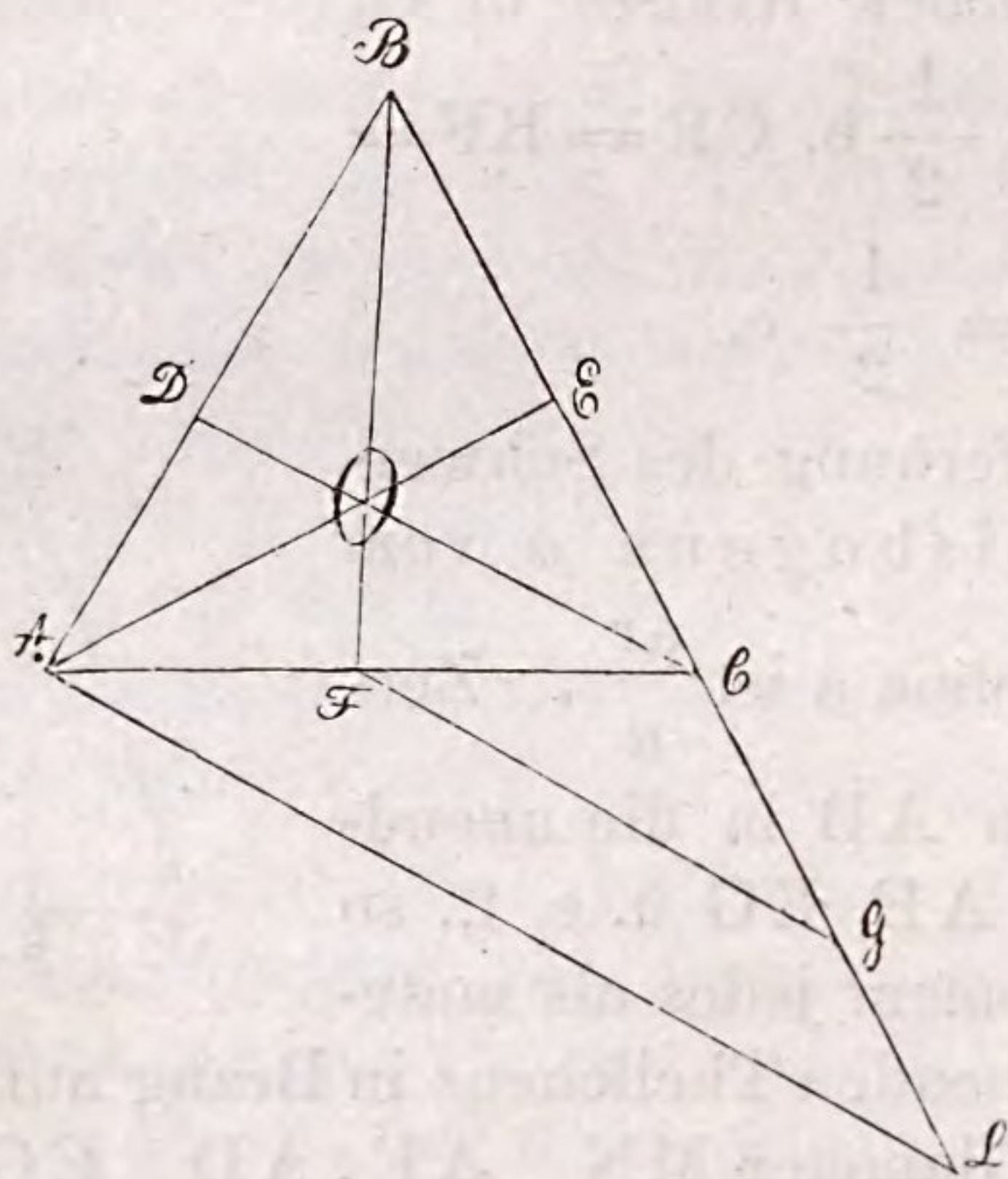


Fig. 19



Der Schwerpunkt einer Dreiecksebene ist von der Grundlinie um ein Drittel der von der Mitte derselben zur Spitze gezogenen Geraden entfernt. Denn denkt man sich das Dreieck einmal in unendlich dünne aber schwere zu  $AB$  (Fig. 19) parallele, das andre Mal in solche zu  $BC$  parallele Streifen zerlegt, so liegt der Schwerpunkt der ersteren, folglich des aus ihnen bestehenden Dreieckes in ihrer Halbirungslinie  $CD$  und derjenige der letzteren, also wieder des Dreieckes, in ihrer Halbirungslinie  $AE$ . Soll aber der Schwerpunkt des Dreieckes zugleich in  $CD$  und  $AE$  liegen, so kann diess nur der Durchschnitt  $O$  dieser beiden Geraden sein.



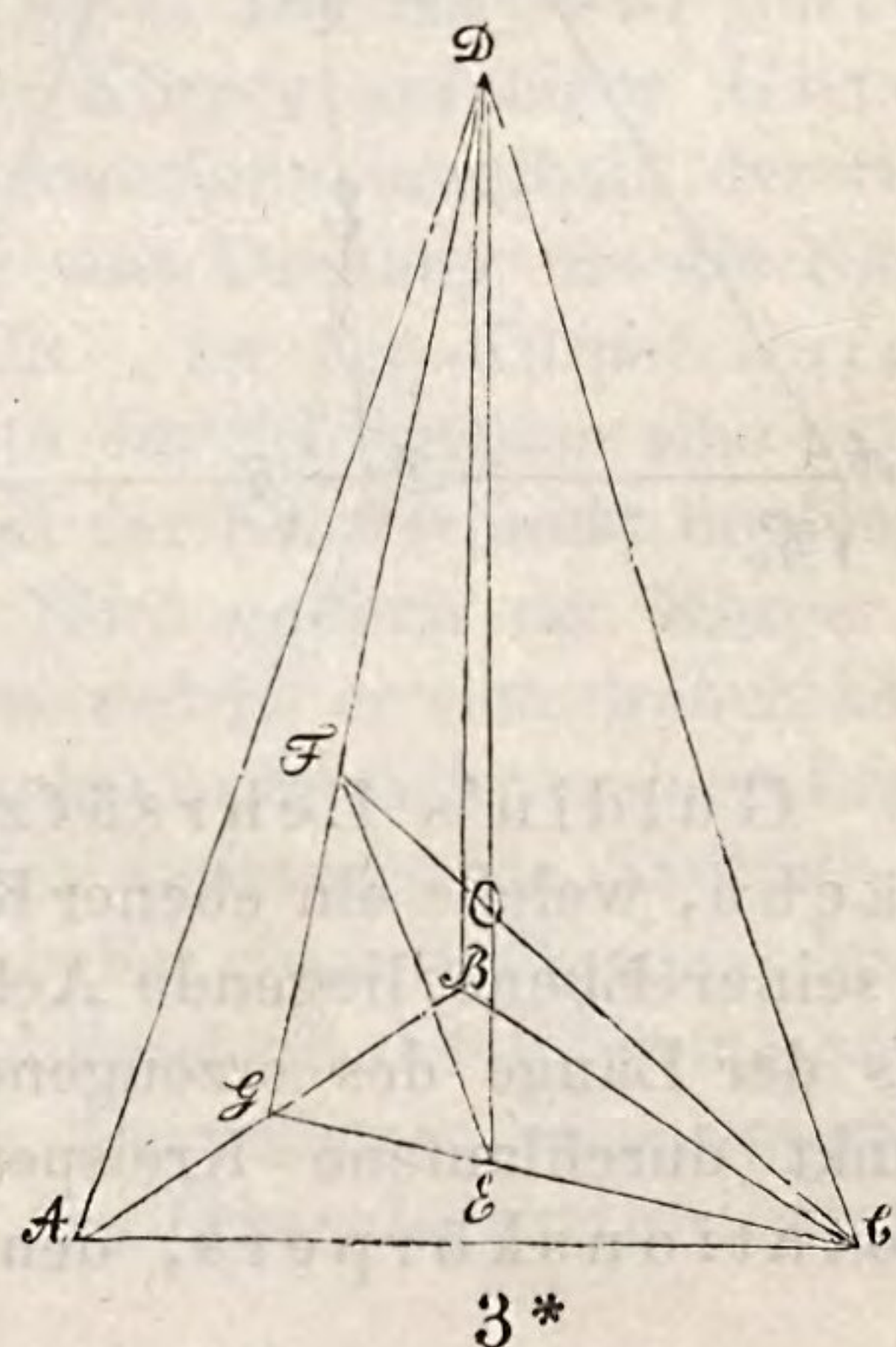
$$\begin{array}{lll}
 AD = BD = \frac{1}{2} AB & FG \parallel AL & AF : FC = GL : CG \\
 BE = EC = \frac{1}{2} BC & & AF = FC \quad GL = CG \\
 AF = CF = \frac{1}{2} AC & & CG = \frac{1}{2} CL \\
 FG \parallel DC \parallel AL & DC \parallel AL & AD : DB = CL : BC \\
 & & AD = DB \quad CL = BC \\
 & & CG = \frac{1}{2} BC \\
 OC \parallel FG & OF : BO = CG : BC \\
 & OF = \frac{1}{2} BO \\
 & = \frac{1}{3} BF
 \end{array}$$

Zur Auffindung des Schwerpunktes eines beliebigen Polygons zerlegt man es durch Diagonalen in Dreiecke, bestimmt den Schwerpunkt jedes derselben, betrachtet diesen als je einen Angriffspunkt paralleler Kräfte von der beziehungsweisen Grösse der betreffenden Dreiecksflächen und sucht den Kraftmittelpunkt der letzteren.

Der Schwerpunkt des Mantels eines senkrechten Kegels — als Beispiel einer krummen Fläche — ist um den dritten Theil der Höhe von der Grundfläche entfernt. — Die Schwerpunkte aller Dreiecke, in welche man den Kegelmantel zerlegt denken kann, liegen um ein Drittel der ihre Höhe darstellenden Seitenlinie des Kegels von ihrer in der Peripherie der Kegelgrundfläche gelegenen Basis entfernt, somit sämtliche in einem zur Grundfläche des Kegels parallelen Kreis, der um  $\frac{1}{3}$  der Höhe von ersterer entfernt ist und dessen Centrum den Schwerpunkt des Kegelmantels darstellt.

Der Schwerpunkt einer Pyramide wird gefunden, indem man den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Pyramidenspitze durch eine Gerade verbindet und diese in vier gleiche Theile zerlegt. Der der Basis nächste Theilungspunkt ist der gesuchte Schwerpunkt der Pyramide.

Fig. 20.









eine in ihrer Ebene liegende Achse beschreibt, gleich ist dem Produkt aus der erzeugenden Fläche in die von ihrem Schwerpunkt durchlaufene Kreisperipherie, sind geeignet, mittels mechanischer Elemente die geometrischen Aufgaben der Oberflächen und Kubikinhaltsberechnung an Rotationskörpern zu lösen, so ist für die Kugel die erzeugende Kurve ein Halbkreis  $= r\pi$  und der Weg seines Schwerpunktes eine Kreisperipherie  $= 2\pi x$ , deren Radius der Abstand des Schwerpunktes vom Centrum ist und sich ergibt, wenn man in der obigen Formel  $x = \frac{ar}{a}$   $a = 2r$   $\alpha =$

$r\pi$  setzt, wonach  $x = \frac{2r}{\pi}$ , woraus die Kugeloberfläche  $= r\pi \cdot 2\pi \frac{2r}{\pi} = 4r^2\pi$ . und ähnlich der Körperinhalt der Kugel  $= \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3} r^3\pi$ .

4. Der Schwerpunkt eines Körpers, als der Mittelpunkt paralleler Kräfte, behält seine Lage im Körper unverändert bei, wenn der Körper seine Stellung gegen die auf ihn einwirkenden Parallelkräfte ändert, vorausgesetzt, dass die relative Lage der Kraftangriffspunkte, d. i. der materiellen kleinsten Bestandtheile im Körper die nämliche bleibt. Desshalb steht der Körper in jeder Lage gegen die ihn beeinflussenden Kräfte im Gleichgewicht, solange sein Schwerpunkt durch eine daselbst angebrachte der angreifenden Mittelkraft gleiche Gegenkraft oder durch Befestigung der angesonnenen Bewegung Widerstand leistet. — Bei vollkommener Unterstützung des Schwerpunktes, in welchem Fall alle durch ihn gehenden Krafrichtungen sich aufheben, ist der Körper in Ruhe. Die Art der Unterstützung ist mannigfach. Ruht der Körper auf einer Unterlage, so muss der Fusspunkt der Schwerlinie innerhalb derselben fallen; sonst ertheilt ihm die Schwere eine Drehung um die Kante, über welche die Schwerlinie hinausfällt. Ist der Körper aufgehängt, so ist für den Gleichgewichtstand die Schwerlinie eine gerade Verlängerung der Aufhängungslinie, und der Schwerpunkt liegt senkrecht unter dem Befestigungspunkt. Wird endlich der Körper an zwei Punkten festgehalten, um welche er sich drehen kann, so müssen diese beiden Unterstützungspunkte in der Schwerebene liegen.

Hat in einer die momentane Ruhe verbürgenden Stellung der Schwerpunkt eine so tiefe Lage, dass er bei einer Stellungsänderung höher zu liegen kommt, als vorher und deshalb der Körper, sofern jene Veränderung nur eine geringe war, von selber in seine ursprüngliche Position zurückkehrt, so heisst das Gleichgewicht stabil.



Liegt dagegen der Schwerpunkt so hoch, dass schon ein schwacher Anlass denselben senkt und hiemit den Körper in eine neue Lage bringt, welche er zu Gunsten der früheren nicht wieder aufgibt, so war das Gleichgewicht labil. — Bleibt endlich der Schwerpunkt bei jeder Drehung des Körpers an derselben Stelle, was immer erreicht wird, wenn mit ihm der konstante Unterstützungspunkt zusammenfällt, so besteht ein indifferentes Gleichgewicht.

Wirkt auf einen ruhenden Körper eine Kraft, welche der Schwerrichtung nicht parallel ist, so wird derselbe entweder verschoben oder umgeworfen. Der Widerstand, welchen er dem letzteren Bestreben setzt, heisst seine Standfähigkeit, Stabilität. Sie wird gemessen durch das statische Moment seines im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gewichtes in Bezug auf die Linie, um welche die Resultante aus der Schwere und der Umwerfkraft den Körper drehen soll. Gewicht, Ausdehnung der Grundfläche, Entfernung der Schwerlinie von der Drehungskante werden direkt, die Höhe des Schwerpunktes über der Unterstützungsfläche umgekehrt die Grösse der Stabilität bedingen.

5. Wirkt die Kraft, welche die Bewegung eines Körpers veranlasst hat, noch während der Bewegung auf ihn ein, so wird deren Grösse in jedem Moment um etwas vermehrt. Ein Bild solcher gleichförmig beschleunigter Bewegung sehen wir im freien Fall der Körper.

Der Fall der Körper ist eine Wirkung der Erdanziehung. Weil die Masse der Erde gegenüber den Massen der von ihr angezogenen Körper unendlich überwiegt, ist die Quantität der letzteren ganz ohne Einfluss auf die Schnelligkeit der Fallbewegung und fällt nach Wegnahme des Luftwiderstandes jeder Körper mit gleicher Geschwindigkeit und nach denselben Gesetzen zur Erde.

Durch die Fallbewegung erlangt der Körper eine gewisse Geschwindigkeit, mit welcher er, wenn in einem bestimmten Zeitmoment die Schwere auf ihn zu wirken aufhörte, von da ab gleichförmig fortginge. Diese Endgeschwindigkeit (das Maass der Beschleunigung), welche mit  $g$  bezeichnet und am Schluss der ersten Sekunde durch übereinstimmende Beobachtung aller Zeiten und Orte, sowie auf dem Wege der Rechnung mit Hilfe des Sekundenpendels auf Erden  $= 9,81$  Metres gefunden wurde, wächst in geradem Verhältniss mit der Zeit, während welcher die Schwere eingewirkt hatte, und ist nach  $t$  Secunden  $c = gt$ .

Um den Fallraum einer bestimmten Zeiteinheit — Sekunde — zu finden, zerlegt man dieselbe in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Zeittheilchen, innerhalb deren einem die Bewegung als gleichförmig angesehen werden darf, während sie in jedem folgenden wegen fortwauernder Beeinflussung der Schwere um die nämliche Grösse zu-



nimmt. Legt der Körper im ersten unendlich kleinen Zeitmoment den Weg  $w$  zurück, so im zweiten wegen der Beharrlichkeit  $w$ , durch die Schwere aber ein neues  $w$ , somit im Ganzen  $2w$ . Diese Geschwindigkeit  $2w$  bleibt ihm durch das Beharrungsvermögen auch im dritten Zeitmoment, weil aber auch in diesem die Schwere seinen Weg um  $w$  vergrössert, so macht er  $3w$ , dergleichen im nächsten  $4w$  und im  $n^{\text{ten}}$  Moment der ersten Sekunde  $nw$ . Im ersten unendlich kleinen Moment der zweiten Sekunde garantirt ihm die Beharrlichkeit  $nw$  und verleiht ihm die Erdanziehung ein neues  $w$ , er hat also die Geschwindigkeit  $(n+1)w$ , im zweiten Moment der zweiten Sekunde  $(n+2)w$  und im  $n^{\text{ten}}$   $(n+n)w = 2nw$ . Auf dieselbe Weise gewinnt er im  $n^{\text{ten}}$  unendlich kurzen Abschnitt der dritten Sekunde  $3nw$  und im letzten Moment der  $t^{\text{ten}}$  Sekunde  $tnw$ . Der ganze Fallraum für diese Zeit von  $t$  Sekunden ist also

$$= w + 2w + 3w + \dots nw + (n+1)w + (n+2)w + \dots \\ 2nw + (2n+1)w + \dots 3nw \dots + 4nw + \dots tnw = \\ w (1 + 2 + 3 + \dots n + (n+1) + (n+2) + \dots 2n + \\ (2n+1) + \dots 3n + \dots 4n + \dots tn)$$

welche in Klammern stehende Progression eine Reihe von  $tn$  immer um je eine Einheit zunehmender Zahlen darstellt, also  $tn$  Glieder, folglich die Summe  $(1+n) \frac{nt}{2}$  hat. Demnach wird der Fallraum

$s$  für die Zeit  $t$   $s = w (1+n) \frac{nt}{2}$  und unter gleichen Verhält-

nissen für  $T$   $S = w (1+nT) \frac{nT}{2}$

$$s : S = (1+n) \frac{nt}{2} : (1+nT) \frac{nT}{2} \\ = \frac{1+nt}{n} t : \frac{1+nT}{n} T \\ = \frac{1}{n} + t^2 : \frac{1}{n} + T^2$$

weil  $n$  unendlich gross, ist  $\frac{1}{n}$  unendlich klein, darf desswegen vernachlässigt werden und es steht  $s : S = t^2 : T^2$  d. h. die Fallräume stehen in geradem Verhältniss zu den Quadraten der Fallzeiten.

Hat ein fallender Körper am Ende der ersten Sekunde die Geschwindigkeit  $g$  und an deren Anfang die Geschwindigkeit Null, so kommt ihm während dieser Zeitdauer das arithmetische Mittel der beiden Grenzggeschwindigkeiten  $\frac{g+0}{2} = \frac{g}{2}$  zu; in der That er-

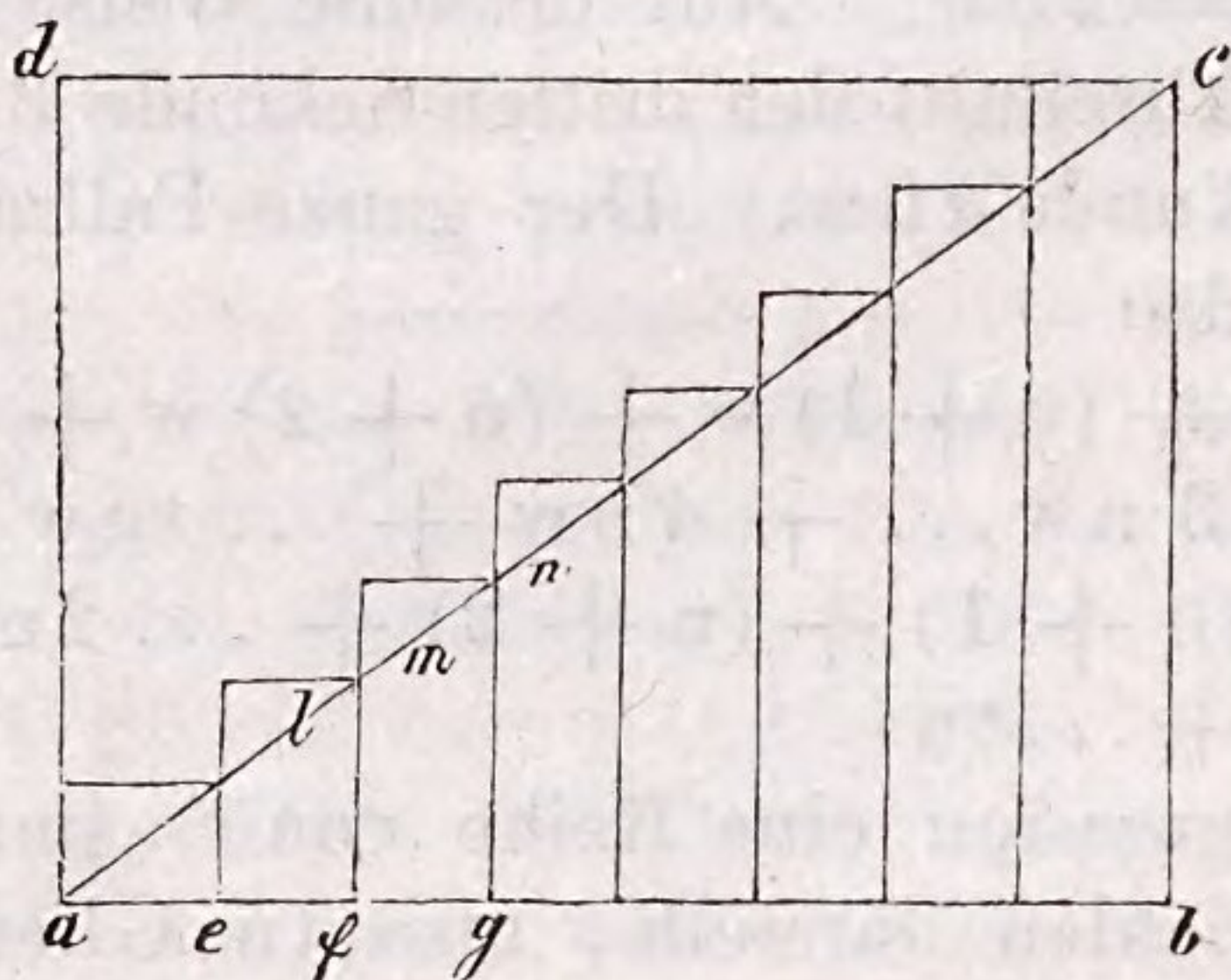


gibt die Erfahrung, dass, wenn der Körper vom Ende der ersten Sekunde an dem weiteren Einfluss der Erdanziehung entrückt in jeder folgenden Zeiteinheit den Weg  $g = 9,81$  Metres zurücklegt,

15. 1/2 er in der ersten Sekunde den konstanten Fallraum  $\frac{g}{2} = 4,905$  durch-

läuft. — Dass im Allgemeinen der Raum, welchen ein Körper vermöge der beschleunigenden Wirkung einer beständigen Kraft in der ersten Sekunde zurücklegt, die Hälfte der am Schluss

Fig. 22.



dieser Zeit erlangten Endgeschwindigkeit sei, ergibt sich auch, wenn man die Zeiteinheit in der Geraden ab die in ihr erlangte Endgeschwindigkeit aber durch bc ausdrückt, wo dann, weil immer  $s = ct$ , der Raum, welchen bei fortgesetzter selbständiger Bewegung der Körper vermöge der Geschwindigkeit bc in der Zeit ab beschreiben würde, im Rechteck abcd vorliegt. Theilt man die Zeit ab in die unendlich

kleinen Abschnitte  $ae = ef = fg \dots$ , so sind die beziehungsweisen Endgeschwindigkeiten dieser Momente  $le, mf, ng \dots bc$  unter sich in demselben Verhältniss, wie die zugehörigen Zeiten  $ae, af, ag \dots ab$ . Weil man ferner wegen der unendlichen Kürze jedes einzelnen dieser Zeiträume innerhalb desselben die Geschwindigkeit als konstant gelten lassen und die hierin und damit zurückgelegten Wege in den Rechtecken  $al, em, fn \dots$  versinnlichen darf, so ist die Summe all dieser Rechtecke der in der ersten Sekunde gemachte Weg. Es ist unschwer einzusehen, dass die von diesen Rechtecken durch die Diagonale  $ac$  abgeschnittenen Stücke um so kleiner ausfallen, je kleiner  $ae, ef \dots$  sind, oder je mehr Zeittheile man in der Sekunde ab annahm, ja dass, sobald die Anzahl dieser Momente unendlich gross ist, dieselben völlig vernachlässigt und die Rechtecke in Summe gleich dem Dreieck  $abc$  gesetzt werden dürfen. Nun ist aber  $\triangle abc = \frac{1}{2} abcd$  und hiemit demonstriert, dass der Bewegungsraum der ersten

Sekunde  $\frac{g}{2}$ , und unter Hinzunahme des obigen Gesetzes in  $t$  Sekunden

den  $\frac{g}{2} t^2$  sei. Durch Division in das Quadrat der früheren Gleichung

$c = gt$  erwachsen die weiteren Relationen:



$$\frac{c^2}{s} = \frac{g^2 t^2}{\frac{g}{2} t^2} = 2g$$

$$1) c = \sqrt{2gs} \quad 3) s = \frac{c^2}{2g} \quad 5) t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$2) c = gt \quad 4) s = \frac{g}{2} t^2 \quad 6) t = \frac{c}{g}$$

$$7) g = \frac{c}{t} \quad 8) g = \frac{c^2}{2s} \quad 9) g = \frac{2s}{t^2}$$

Ein fallender oder überhaupt unter Einfluss einer kontinuierlichen Kraft mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit bewegter Körper legt demnach in einer Sekunde den Weg  $\frac{g}{2}$ , in zweien den Weg  $\frac{g}{2} \cdot 4 = 2g$ , also in der

zweiten  $2g - \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}$ , in dreien  $\frac{g}{2} \cdot 9 = \frac{9g}{2}$ , also in der dritten

$\frac{9g}{2} - \frac{4g}{2} = \frac{5g}{2}$ , in vierten  $\frac{g}{2} \cdot 16 = 8g$ , also in der vierten  $8g -$

$\frac{9g}{2} = \frac{7g}{2}$ , in fünfen  $\frac{g}{2} \cdot 25 = \frac{25g}{2}$ , also in der fünften  $\frac{25g}{2} - 8g$

$= \frac{9g}{2} \dots$  woraus zu entnehmen, dass, sofern man den Fallraum

der ersten Sekunde als Einheit nimmt, diejenigen der folgenden Sekunden, jede für sich betrachtet, durch die in natürlicher Ordnung aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ausgedrückt werden.

**6.** Formell gelten die Gesetze des Falles für alle Bewegungen, welche unter dem Einfluss einer kontinuierlichen Kraft verlaufen. Der Zahlenwerth von  $g$  dagegen ist für jede besondere Reihe der betreffenden Erscheinungen empirisch zu bestimmen.

**7.** In der Wirklichkeit ist noch Dreierlei zu berücksichtigen. Erstlich vermindert der Widerstand der Luft in geradem Verhältniss zum Umfang und im verkehrten zur Masse des fallenden Körpers seine Fallgeschwindigkeit. Ferner variiren die Fallräume derselben Zeiteinheit je nach der an bestimmten Punkten der Erdoberfläche statthabenden Attraktionsintensität, wie denn ein Körper am Aequator in 6 Sekunden 541,8' an den Polen 543,7' durchfallen würde, weil an diesen wegen der Abplattung der Erde die Erscheinung näher dem Erdcentrum als Anziehungsmittelpunkt erfolgt, während sie an jenem durch die Centrifugalkraft beeinträchtigt wird. Endlich geht die Fallrichtung nicht genau senkrecht zur Erdoberfläche,



sondern wegen der an erhöhten Punkten grösseren Rotationsgeschwindigkeit, welche vom fallenden Körper beibehalten wird, findet für eine Fallhöhe von 10000' eine östliche Abweichung vom Fusspunkt der Verticalen um  $7' 5'' 8'''$  und nebenbei, ausserhalb des Aequator, eine südliche von  $0,88'''$  statt.

8. Galilei, der durch seine 1638 veröffentlichte Entdeckung der Fallgesetze den Anstoss zu einer neuen mechanischen Untersuchungsweise gab, soll seine Beobachtungen theilweise an der Bewegung der Körper auf einer schiefen Ebene gemacht haben, wobei dieselben Gesetze befolgt werden, wie beim freien Fall. Ist der Elevationswinkel einer schiefen Ebene  $\alpha$ , so beträgt die auf ihr einen Körper zum Herabrollen veranlassende Schwere, welche für sich durch das Maass der Beschleunigung  $g$  dargestellt wird,  $g \sin \alpha$ , weshalb unter ihrem beschleunigenden Einfluss ein Körper, welcher in der Zeit  $t$  den freien senkrechten Weg  $\frac{g}{2} t^2$

durchfallen hätte, nur den Raum  $s' = \frac{g}{2} \sin \alpha \cdot t^2$  zurücklegt, an dessen Ende ihm die Geschwindigkeit  $c = g t \cdot \sin \alpha$  geworden ist. Nehmen wir jenen Raum  $s'$  als die Länge der schiefen Ebene, so bedeutet  $s' \sin \alpha$  ihre Höhe. Ein von dieser Höhe herabgefallener Körper besässe die Endgeschwindigkeit  $c = \sqrt{2 g s' \sin \alpha}$ ,

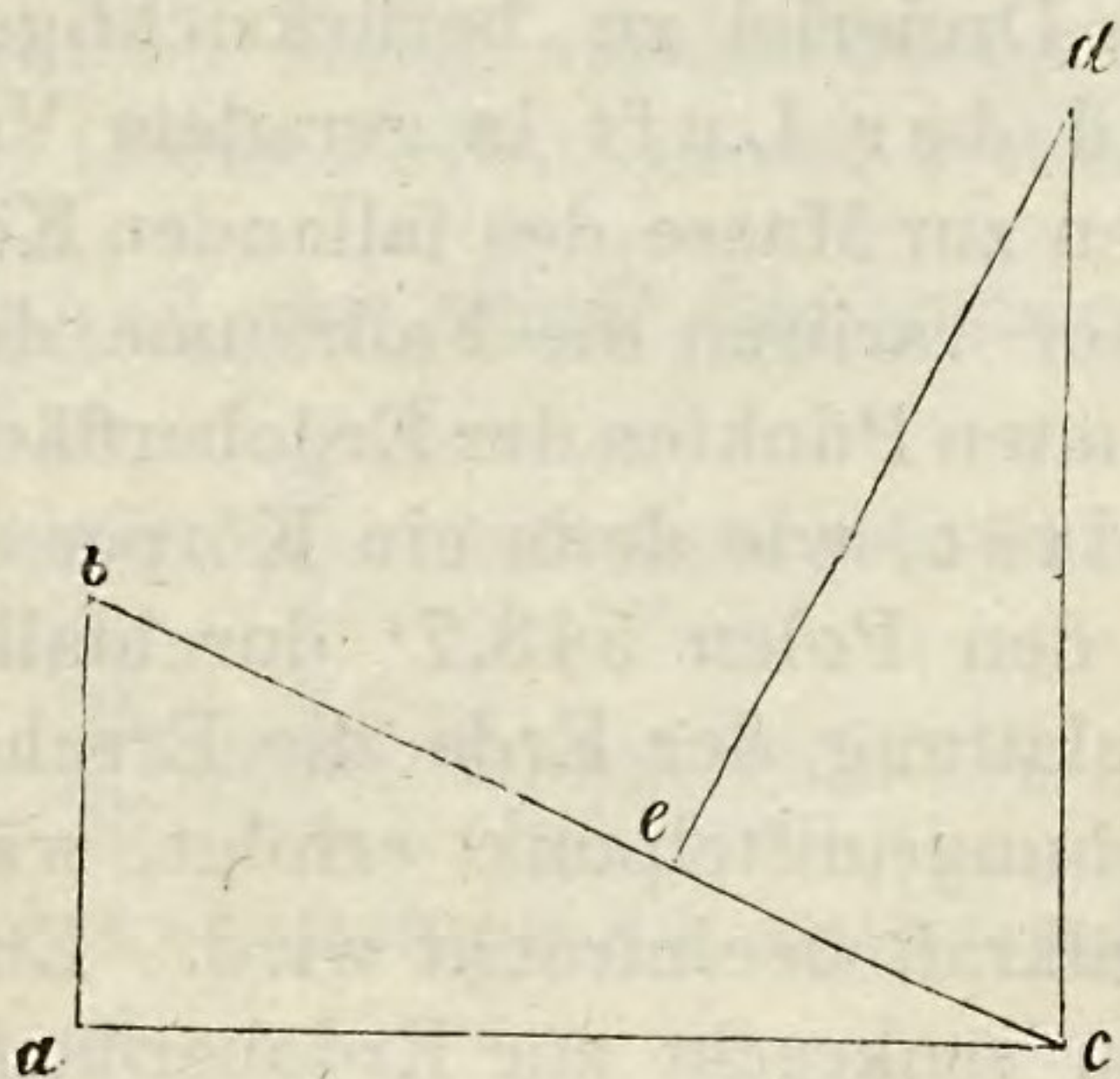
$$s' = \frac{g}{2} \sin \alpha \cdot t^2$$

$$c = \sqrt{2 g \frac{g}{2} \sin \alpha^2 t^2} = g t \sin \alpha$$

wonach ein Körper durch den Lauf auf der schiefen Ebene am Ende ihrer Länge dieselbe Geschwindigkeit erworben hat, als durch den senkrechten Fall von ihrer Höhe.

In Fig. 23 versinnlicht  $cd = bc$  die senkrechte Höhe, welche

Fig. 23.



von einem Körper in der gleichen Zeit durchfallen wird, in der er durch  $ec = ab$  rollt, indem die den Lauf auf der schiefen Ebene beschleunigende Schwere in der den freien Fall bewirkenden vollen Anziehungskraft so oft enthalten ist, als die Höhe  $ab$  in der Länge  $bc$ , die durchlaufenen Wege aber zu den die Bewegung unterhaltenden Kräften in geradem Verhältniss stehen.

9. Wird ein Körper durch eine momentane Kraft senkrecht



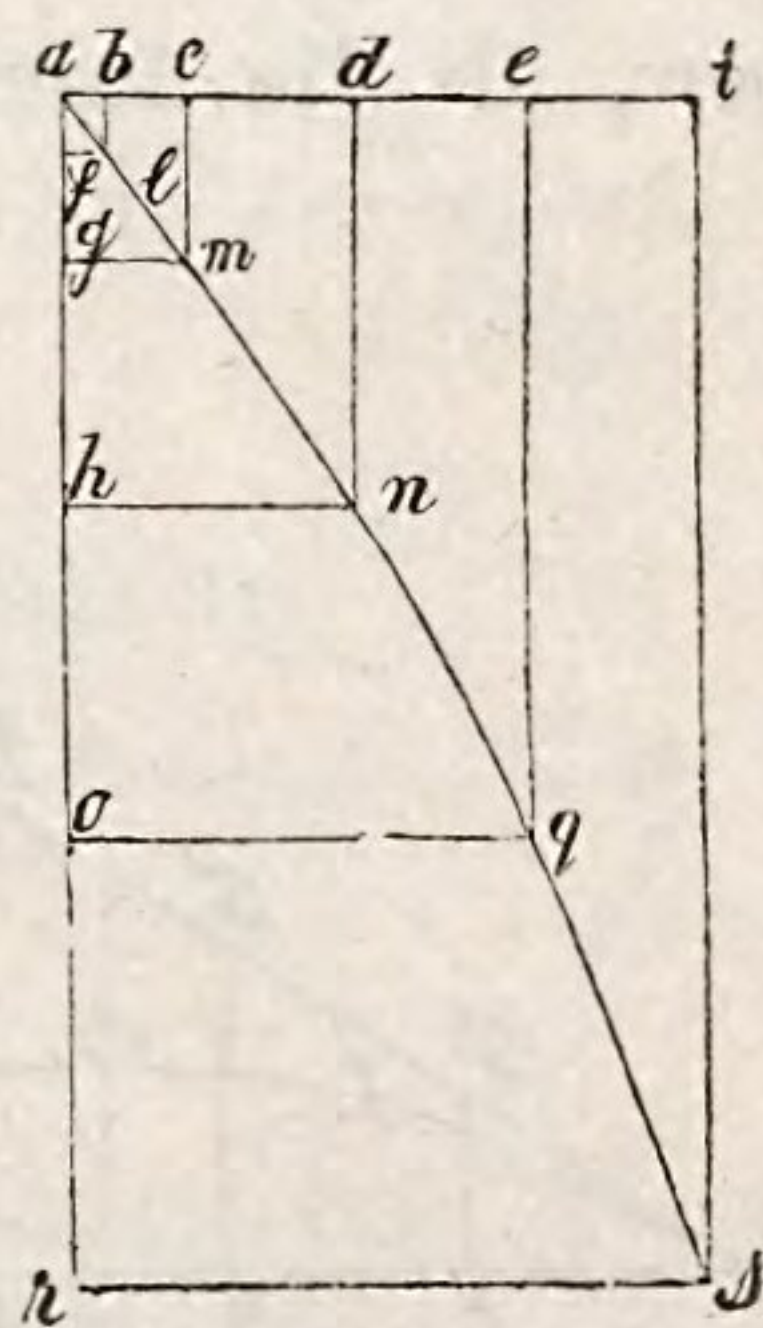
in die Höhe geworfen, so ginge er, wenn keine Erdanziehung bestände, mit gleichförmiger Geschwindigkeit unendlich fort, die Schwere vermindert aber seine Steiggeschwindigkeit schon in der ersten Sekunde erfahrungsgemäss um  $g = 9,81$ , weil sie nach Früherem ihm in derselben Zeit diese Endgeschwindigkeit senkrecht gegen die Erde herab ertheilt, so dass der mit der ursprünglichen Geschwindigkeit  $c$  aufgeworfene Körper am Ende der ersten Sekunde nur noch die Geschwindigkeit  $c - g$  und nach  $t$  Sekunden  $c - gt$  hat. So entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung des steigenden Körpers, welche das reine Gegentheil der gleichförmig beschleunigten Bewegung des fallenden Körpers bildet. Wie ein fallender Körper die Geschwindigkeit  $c$  erlangt hat, nachdem er durch den Raum  $s = \frac{c^2}{2g}$  gefallen ist, so kann umgekehrt ein Körper, dem anfänglich die Geschwindigkeit  $c$  ertheilt wurde, dessen Bewegung jedoch die Schwere in jeder Sekunde um  $g$  vermindert, nur die Steighöhe  $s = \frac{c^2}{2g}$  erreichen und wird vom Scheitel derselben in der nämlichen Linie zurückfallen mit einer dem Steigverlauf gerade entgegengesetzten Folge von Erscheinungen.

**10.** War die Wurfkraft senkrecht zur Erdoberfläche gewendet, also mit der Schwere parallel und gleichlaufend, so findet man die in bestimmten Zeiten durchlaufenen Wege, indem man zu den vermöge der Erdanziehung zurückgelegten Räumen die der Wurfkraft entstammende konstante Geschwindigkeit  $v$  addirt, was für die  $t^{\text{te}}$  Sekunde den Weg  $(2t - 1)g + v$  und in  $t$  Sekunden den Fallraum  $gt^2 + vt = t(gt + v)$  gibt.

**11.** Bilden Schwere und Wurfkraft einen Winkel, so führt die Construction des Kräfteparallelogramms auf eine Wurflinie, welche schon Galilei für den luftleeren Raum als Parabel erkannte; während in dieser der absteigende Schenkel dem aufsteigenden genau gleicht, bewirkt der Luftwiderstand in der Bahn des geworfenen Körpers eine derartige Abänderung, dass der absteigende Schenkel kürzer und steiler verläuft, wie dies der ballistischen Kurve eigen ist.

**12.** Bei horizontalem Wurf würde durch die Wurfkraft allein der Körper bei gleichförmiger Geschwindigkeit einen Weg gleich  $ab$  durchlaufen, während die Schwere als kontinuierlich beschleunigende Kraft in der ersten Sekunde die Bewegung  $af$ , in der zweiten

Fig. 24.





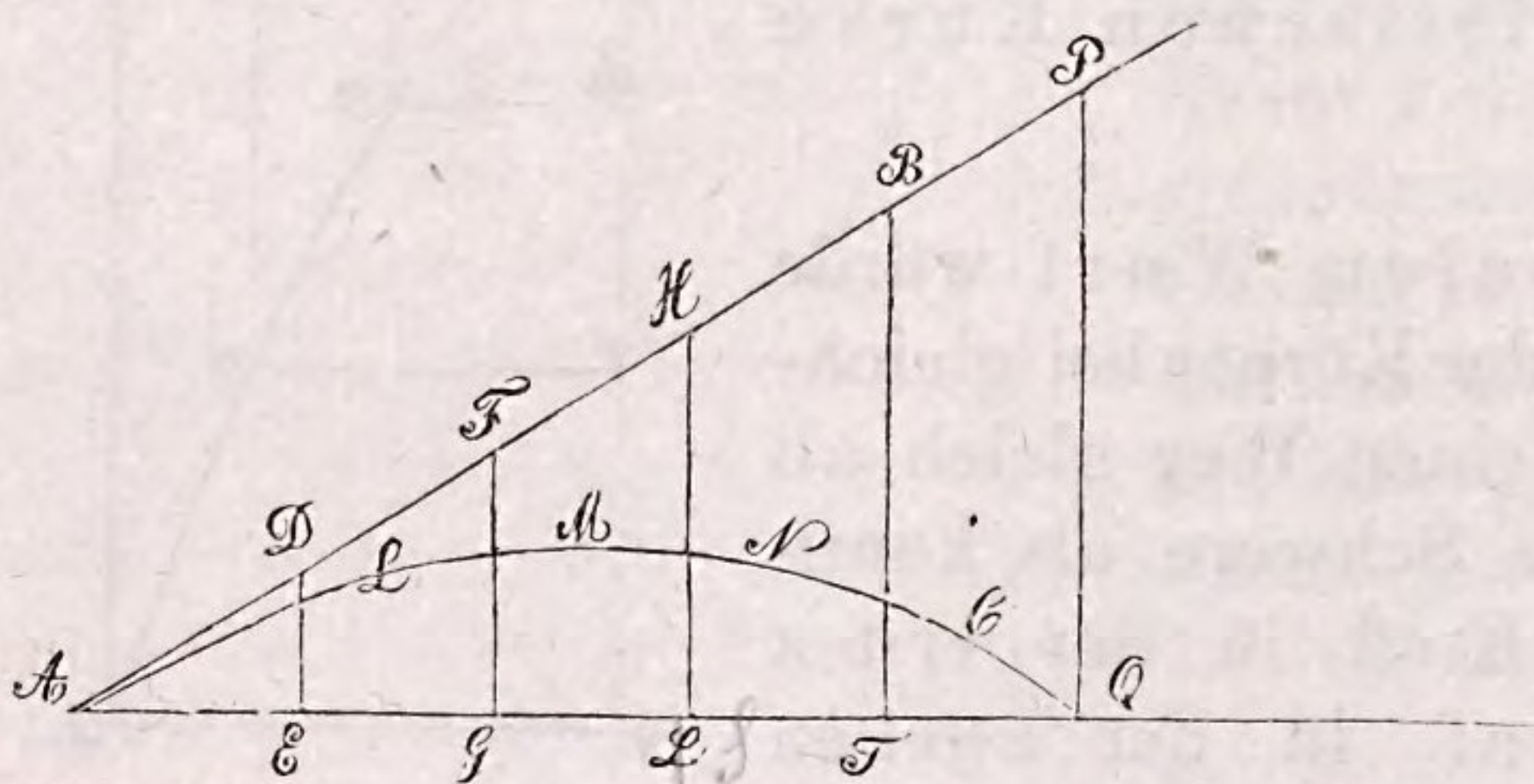
$fg = 3af$ , in der dritten  $gh = 5af \dots$  ihm ertheilt. Der Körper gelangt unter Einfluss beider Kräfte in der ersten Sekunde nach  $l$ , in der zweiten nach  $m$ , in der dritten nach  $n$ , in der vierten nach  $q$ , am Ende der fünften nach  $s$ , also nach der Wurfrichtung gerade so weit, als ihn der Wurf allein getrieben hätte, weil  $rs = at$ ; auch beschreibt er zwar nicht den Fallraum  $ar$ , aber der Punkt  $t$  liegt der Erdoberfläche so nah, als  $r$ , und der Körper braucht zu seinem krummlinigen Weg nicht länger, als wenn er von der entsprechenden senkrechten Höhe herabgefallen wäre. Indem zwischen den Abscissen und Ordinaten dieser Kurve die Relation besteht

$$\left. \begin{array}{l} fl:gm:hn:oq:rs = 1:2:3:4:5 \\ af:ag:ah:ao:ar = 1:4:9:16:25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} af:ag:ah:ao:ar = \\ fl^2:gm^2:hn^2:oq^2:rs^2 \end{array}$$

so ist dieselbe eine Parabel, für welche nämlich die Abscissen sich verhalten wie die Quadrate der Ordinaten.

**13.** Liegt in dieser Wurflinie nur Ein Arm einer Parabel vor, so beschreibt ein schief in die Höhe geworfener Körper — abgesehen vom Luftwiderstand — eine vollständige Parabel, deren Scheitel den höchsten von ihm erreichten Punkt bildet. Einem in der Richtung  $AB$  Fig. 25 mit der konstanten Geschwindigkeit  $c = AD$  fortgeschleuderten Körper raubt, wie einem senkrecht aufsteigenden, die Schwere in der ersten Sekunde  $g$  in  $t$  Sekunden  $gt$  an seiner Endgeschwindigkeit, wonach er, analog den den Fallgesetzen huldigenden Erscheinungen, am Ende der ersten Sekunde in einer Höhe  $LE$  anlangt, welche um  $DL = \frac{g}{2}$  kleiner ist, als die Höhe  $DE$  zu der er von der Wurfkraft allein in der gleichen Zeit befördert worden wäre. Gleichermaassen beträgt nach 2 Sekunden seine wirkliche Entfernung von der Erdoberfläche  $MG$  um  $\frac{g}{2} 4 = 4DL = FM$  nach 3 Sekunden  $\frac{g}{2} 9 = 9DL = HN$ , nach  $t$  Sekunden  $\frac{g}{2} t^2$  weniger, als die durch den Wurf ohne Betheiligung der Schwere angestrebte. In unserer

Fig. 25.



Zeichnung wird nach 5 Sekunden die Verminderung seiner Erhebung  $PQ = \frac{g}{2} 25 = 25DL$  gleich dieser selbst u. der Körper fliegt daher von  $A$  durch  $ALMNCQ$  nach  $Q$ .



Die Abscisse  $AL$  und Ordinate  $NL$  irgend eines Parabelpunktes  $N$ , in welchem sich der geworfene Körper nach  $t$  Sekunden befindet, können beziehungsweise ausgedrückt werden durch

$$x = AH \cdot \cos \alpha = c \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y = AH \sin \alpha - HN = c \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

Am Endpunkt des Wurfs ist  $y = 0$  folglich  $\frac{g}{2} t^2 = c t \sin \alpha$  voraus

$$t = \frac{2c \cdot \sin \alpha}{g} \quad (\text{Formel für die Wurfdauer}) \quad c = \frac{gt}{2 \sin \alpha} \quad (\text{Formel}$$

$$\text{für die Wurfgeschwindigkeit}) \quad x = c t \cdot \cos \alpha = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (\text{Formel für die Wurfweite}), \text{ was ein Maximum wird,}$$

$$\text{wenn } \alpha = 45^\circ, \text{ nämlich } x = \frac{c^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{c^2}{g}, \text{ weshalb unter}$$

sonst gleichen Umständen ein Wurf, dessen Richtung mit der Horizontalebene einen Winkel von  $45^\circ$  macht, die grösste Weite erzielt.

**14.** Trifft ein mit der Geschwindigkeit  $AB$  fallender oder rollender Körper unter dem Winkel  $\alpha = \beta$  auf ein Hinderniss  $MN$ , ohne welches er in der nächsten Zeiteinheit den Weg  $BC$  gemacht hätte, so zerlegt man letztere nach dem Kräfteparallelogramm in die zu  $MN$  senkrechte Bewegung  $DC$ , welche aufgehoben wird und in  $BD = BC \cdot \cos \alpha$ , mit welcher Geschwindigkeit der Körper in der Richtung  $BN$  fortgeht. Ist  $MN$  eine Kurve, deren Tangente  $AB$ , so wird  $\beta = 0$  folglich  $BD = BC \cdot \cos 0 = BC$  d. h. der Körper geht von seiner geradlinigen Bahn mit unverminderter Geschwindigkeit auf die Kurve über.

Fig. 26.

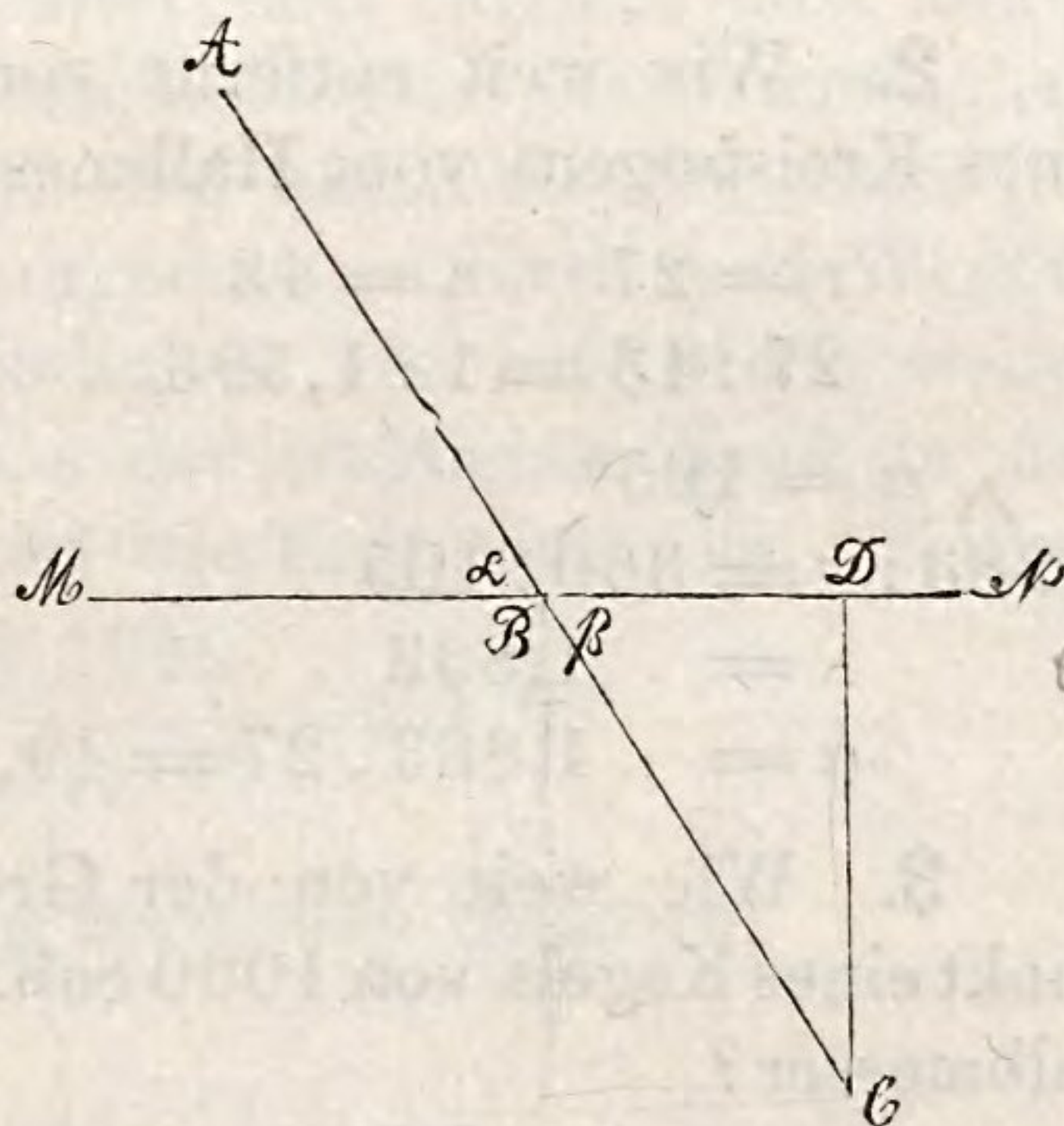
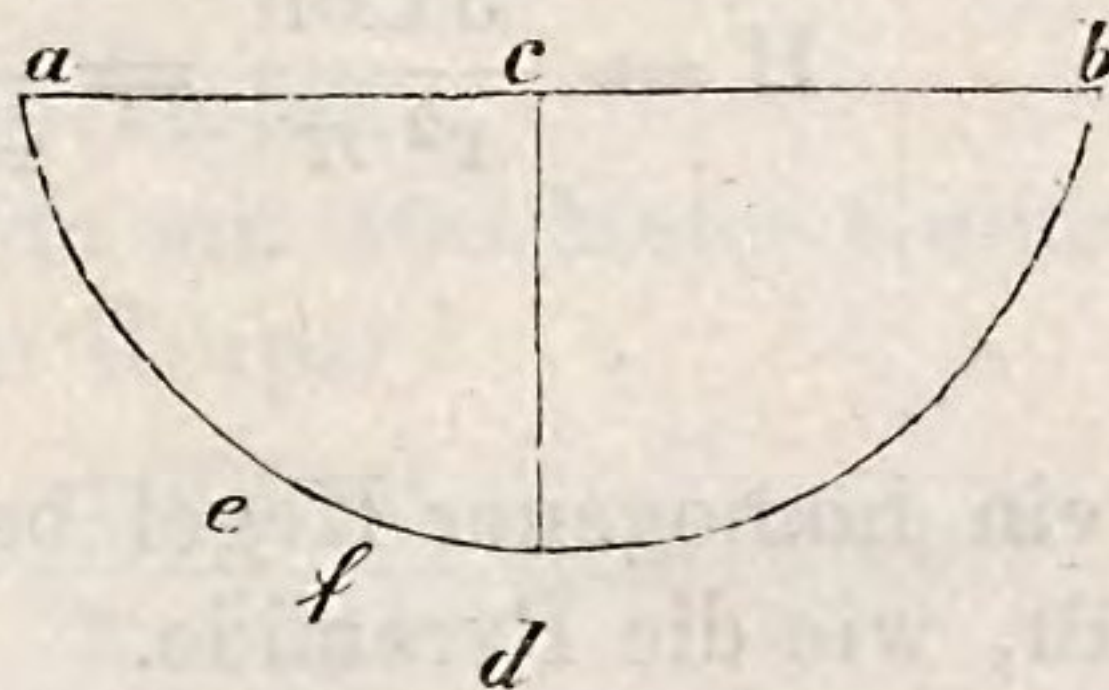


Fig. 27.



**15.** Wenn man in Fig. 27 a d aus unendlich kleinen geraden Stücken zusammengesetzt ansieht, kann a c d als schiefe Ebene betrachtet werden von der Länge a d



der Höhe  $c d$ . Dann kommt ein in der Kurve  $a d$  fallender Körper in  $d$  mit derselben Geschwindigkeit an, als wäre er von der senkrechten Höhe  $c d$  gefallen. Vermöge ihrer steigt er von  $d$  nach  $b$  in einer Bewegung, welche ebenso abnimmt, wie sie von  $a$  nach  $d$  wuchs. — Ist  $a d b$  eine Cykloide, d. h. eine Kurve, welche der Peripheriepunkt eines Kreises beschreibt, wenn dieser, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie rollt, so fällt auf ihr unter allen Linien der Körper in kürzester Zeit von  $a$  nach  $d$ . Auch ist die Fallzeit von  $a$  nach  $d$  so gross, als die von  $e$ ,  $f$ , oder irgend einem andern Punkt der Kurve nach  $d$ , weil beim Bewegungsausgang von einem höheren Punkt entsprechende Stellen mit verhältnissmässig beträchtlicherer Beschleunigung durchlaufen werden. Hierauf bezieht sich die Bezeichnung: **Tautochrone**.

### Beispiele.

1. In welcher Entfernung von der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks liegt dessen Schwerpunkt, wenn erstere  $5'$ , jede der beiden andern Seiten aber  $7'$  misst?

$$h = \sqrt{49 - \frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 13,03 = 6,515$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot 6,515 = 2,172'$$

2. Wie weit entfernt vom Mittelpunkt liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Halbmesser  $27''$  und der Sehne  $43''$ ?

$$\begin{array}{lll} r = 27 & a = 43 & \text{chord. } \alpha = 1,593 \\ 27 : 43 = 1 : 1,593 & & \sin \alpha = 0,796 \quad \text{für } r = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \wedge \alpha = 105^\circ & e = \frac{27 \cdot 49,491}{43} = 23,4 \\ 6,283 : x = 360 : 105 & \end{array}$$

$$x = 1,833$$

$$\alpha = 1,833 \cdot 27 = 49,491''$$

3. Wie weit von der Grundfläche entfernt liegt der Schwerpunkt eines Kegels von  $1000 \text{ cub.}''$  Körperinhalt und  $2''$  Grundflächenhalbmesser?

$$\text{Con} = \frac{G H}{3} = \frac{r^2 \pi H}{3}$$

$$H = \frac{3 \text{ Con}}{r^2 \pi} = \frac{3000}{4 \cdot 3,1415} = 238,7''$$

$$\frac{1}{4} 238,7 = 59,7'' \quad \text{weil}$$

sich ein homogener Kegel bezüglich seines Schwerpunkts gerade so verhält, wie die Pyramide.



4. Durch welche Zahl wird die Stabilität eines Körpers ausgedrückt von 8 Pfund Gewicht, dessen Schwerpunkt 4' über dem Boden erhöht, die Schwerlinie aber von der Umdrehungskante 14' entfernt ist?

$$\frac{8 \cdot 14}{4} = 28$$

5. In welcher Zeit durchfällt ein Körper, abgesehen von allen Widerständen, eine senkrechte Höhe von 240,345 Meter, und welche Geschwindigkeit hat er am Ende dieser Zeit erworben?

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240,345}{9,81}} = \sqrt{2 \cdot 24,5} = 7^s$$

$$c = gt = 9,81 \cdot 7 = 68,67^m$$

6. Eine 6pfündner Kanonenkugel wird aus einem 6' langen Lauf mit einem Gasdruck von 36000 Pfund geschossen. Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit verlässt sie den Lauf?

$$g = 9,81^m = 30'$$

$$30 : 6 = g' : 36000$$

$$g' = 180000$$

$$c = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \cdot 180000 \cdot 6} = 600 \sqrt{6} = 600 \cdot 2,449 = 1469,4'$$

$$t = \frac{c}{g} = 1469,4 : 180000 = 0,008^{\text{sec.}}$$

7. Wenn ein Körper, welcher unter dem Einfluss einer kontinuierlichen Kraft mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit einen Weg von 13,625 Meter durchlief und am Ende desselben mit einer bei plötzlicher Aufhebung der vorgedachten Kraft und Wegfall aller Hindernisse konstanten Geschwindigkeit von 5,45 Meter weiter geht, wie gross ist der unter Einfluss der fraglichen Kraft in der ersten Sekunde zurückgelegte Raum und wie lang wirkte sie auf ihn?

$$g' = \frac{5,45^2}{2 \cdot 13,625} = \frac{29,7025}{2 \cdot 13,625} = 1,09$$

$$\frac{1}{2} g' = 0,545 \text{ Meter Weg der ersten Sekunde}$$

$$t = \frac{5,45}{1,09} = 5^{\text{sec.}}$$

8. Wie hoch ist ein Thurm, von dessen Spitze bis zum Fuss ein Stein in 5 Sekunden fällt?

$$s = 4,9 \cdot 25 = 122,5 \text{ Meter.}$$

9. Wie hoch und wie lang steigt ein mit 400 Meter Geschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfener Körper?

$$t = \frac{400}{9,81} = 40,8^{\text{sec.}}$$

$$s = \frac{160000}{2 \cdot 9,81} = 8154,9^m.$$



10. Wie weit fliegt ein mit 35 Meter Geschwindigkeit unter einem Winkel von  $42^{\circ} 16'$  gegen den Horizont schief geworfener Körper?

$$\text{Wurfweite} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{35^2 \cdot \sin 84^{\circ} 32'}{9,81}$$

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 84^{\circ} 32' & = & 9,9980202 \\ 2 \log . 35 & = & 3,0881360 \\ \hline & & 13,0861562 \\ & & 10 \\ \log 9,81 & = & 0,9916690 \\ \hline & & 2,0944872 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \log \sin 84^{\circ} 32' & = & 9,9980202 \\ 2 \log . 35 & = & 3,0881360 \\ \hline & & 13,0861562 \\ & & 10 \\ \log 9,81 & = & 0,9916690 \\ \hline & & 2,0944872 \end{array}} \right\} 124,305 \text{ Meter}$$

$$\text{Wurfdauer} = \frac{2 c \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 35 \sin 42^{\circ} 16'}{9,81}$$

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 42^{\circ} 16' & = & 9,8277453 \\ \log 35 & = & 1,5440680 \\ \log 2 & = & 0,3010300 \\ \hline & & 11,6728433 \\ & & 10 \\ \log 9,81 & = & 0,9916690 \\ \hline & & 0,6811743 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \log \sin 42^{\circ} 16' & = & 9,8277453 \\ \log 35 & = & 1,5440680 \\ \log 2 & = & 0,3010300 \\ \hline & & 11,6728433 \\ & & 10 \\ \log 9,81 & = & 0,9916690 \\ \hline & & 0,6811743 \end{array}} \right\} 4,799 \text{ sec.}$$

*Handwritten notes:*  
 $h = \frac{35^2 \cdot \sin^2 42^{\circ} 16'}{2 \cdot 9,81}$   
 $1,4509276 \text{ num. } 28$

11. Welche Endgeschwindigkeit erlangt ein auf einer schiefen Ebene mit dem Elevationswinkel  $30^{\circ}$  herabrollender Körper in 8 Sekunden und welchen Weg legt er in dieser Zeit zurück?

$$c = gt \sin \alpha = 9,81 \cdot 8 \cdot 0,5 = 39,21 \text{ Meter}$$

$$s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{2} \sin \alpha \cdot t^2 = 4,905 \cdot 0,5 \cdot 64 \\ \frac{c^2}{2g \sin \alpha} = \frac{1537,4241}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5} \end{array} \right\} 156,9 \text{ m.}$$

12. Wie gross ist der Fallraum der ersten Sekunde auf dem Planeten Jupiter, wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene vom Elevationswinkel  $32^{\circ} 14'$  in 4,25 Sekunden daselbst einen Weg von 366,09 Fuss zurücklegen würde?

$$s = \frac{g}{2} \sin \alpha \cdot t^2 \quad g = \frac{2s}{\sin \alpha \cdot t^2}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 732,18 & = & 2,8646179 \\ \log 32^{\circ} 14' - r & = & 0,7270273 - 1 \\ 2 c . d . \log . 4,25 & = & 18,7432222 - 20 \\ \hline & & 1,8808128 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g = 76' \quad \text{sonach Fallraum der ersten Sekunde} \\ 38' = 11,932 \text{ Meter} \\ 11,932 - 4,905 = 7,027 \text{ m.} \end{array}$$

mehr als auf der Erde.



## IV.

## Das Maass der Kräfte. — Widerstände. — Stoss der Körper.

1. Nennen wir die nothwendige und hinreichende Ursache zur Erzeugung oder Abänderung der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes nach Grösse oder Richtung eine Kraft, so leuchtet nach dem Gesetz des geraden Verhältnisses von Ursache und Wirkung ein, dass das Maass der Kraft in der Grösse der durch sie gesetzten Bewegung liegt. Das Produkt der Kraft, oder des von ihr bewältigten Widerstandes, in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt zurücklegt, wenn er im Sinne der Kraft verschoben wird, heisst Arbeitsgrösse (Arbeit). Bewegt sich der Angriffspunkt in der eingeleiteten Bewegung nach einer anderen Richtung als der von der Kraft ursprünglich angedeuteten, so ist die aufgewendete Kraft gleich dem Produkt aus der Kraft in die Projektion des Weges auf die Krafrichtung. Demgemäss ist die Arbeit einer Kraft positiv oder negativ in Rechnung zu setzen, je nachdem der wirkliche Weg des Angriffspunktes mit der Krafrichtung einen spitzen oder stumpfen Winkel macht. Für einen rechten Winkel wird der gonio-metrische Ausdruck der oben gedachten Projektion, was der Cosinus ist, Null, daher findet in gar keinem Sinn eine Bewegung nach der Krafrichtung statt und die Arbeit der Kraft ist in diesem Fall Null. — Bleibt die Kraft nicht während der Bewegung konstant, so theilt man letztere in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Momente, während deren einem die Kraft als konstant gelten darf. Die Gesamtarbeit bildet dann die Summe aller elementaren Leistungen.

2. Als Einheit zu Vergleichen dient seit Poncelet das Kilogramm meter, d. h. die Kraft, welche den Widerstand von 1 Kilogramm auf die Länge von 1 Meter überwindet. Siebzig solche Einheiten geben eine Pferdekraft, indem ein Pferd mittlerer Güte in jeder Sekunde eine Last von 70 Kilogramm durch eine Strecke von 1 Meter befördert. Bei Berechnung der Leistungen von Dampfmaschinen pflegt man die Pferdekraft zu 75 Kilogramm meter zu nehmen. Zu dem Ausdruck: Pferdekraft soll Watt den Anlass gegeben haben, indem er einem mit acht Pferden arbeitenden Mühlenbesitzer das Anerbieten machte, durch eine weniger kostende Dampfmaschine die Kraft jener Thiere zu ersetzen.

3. Sehr bequem zur Beurtheilung der Grösse einer Kraftleistung ist das Dynamometer, welches im Wesentlichen aus einer starken im Winkel gebogenen Stahlfeder besteht, an deren einem Schenkelende ein getheilter Kreisbogen befestigt ist, der frei durch



einen Schlitz des zweiten Schenkel geht und mit dem durchgesteckten Endstück irgendwo und wie befestigt werden kann. Vom zweiten Schenkelende zieht sich ein dem vorigen paralleler Kreisbogen durch eine Oeffnung des ersten Federarmes und hat jenseits desselben einen Haken, um ein Gewicht oder Aehnliches zu tragen. Wird an den beiden freien Enden der parallelen Kreisbogen in entgegengesetzter Richtung ein Zug geübt, so nähern sich die Schenkel der Stahlfeder und der Theilstrich des ersten Kreisbogens, bis zu welchem der den zweiten tragende Schenkel während des Zuges oder Druckes hereingebogen wird, gibt in Kilogrammen die Kraftleistung an, wenn jeder Grad einer Belastung von je ein Kilogramm entspricht.

4. Hat auf einen Körper eine Kraft längere Zeit eingewirkt, so wurde ihm dadurch eine beschleunigte Bewegung zu Theil, innerhalb deren er selbst der Träger einer sogenannten lebendigen Kraft ist und die Befähigung besitzt, ihm entgegengestellten Widerständen gegenüber eine gewisse Arbeitskraft oder Wirkungsfähigkeit zu bethätigen. In dem die Arbeitsgrösse darstellenden Produkt der Kraft oder des Widerstandes  $W$  in den Weg  $S$ , kann der erstere durch das Gewicht  $P$  des von der Kraft angegriffenen Körpers ersetzt werden. Für  $S$  aber ist zu bedenken, dass, wenn eine Kraft  $g$  am Ende des Weges  $S$  einem Körper die Geschwindigkeit  $c$  ertheilt hat, zwischen diesen Grössen die Relation besteht  $s = \frac{c^2}{2g}$  folglich  $x = WS = P \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{MC^2}{2} \cdot \frac{P}{g} = M$

d. h. ein Körper von der Masse  $M$  und der Geschwindigkeit  $C$  vermag den Widerstand  $W$  durch den Raum  $S$  zu bewältigen, wenn  $WS = \frac{1}{2} MC^2$ . Das halbe Produkt der Masse in das

Quadrat der Geschwindigkeit nennt man die Wirkungsfähigkeit des Körpers, das ganze Produkt  $MC^2$  aber seine lebendige Kraft. Dieser Begriff wurde 1695 durch Leibnitz eingeführt und der todten Kraft gegenübergestellt, worunter er den von den Körpern im Gleichgewichtstand an ihren Berührungspunkten aufeinander ausgeübten Druck verstand.

Nachdem Carnot 1813 die Unterscheidung machte, dass für die Werthbestimmung der von belebten Motoren geübten Wirkungen zwei Wege sich darböten, der eine, indem man fragt, welche Last oder Anstrengung bei völliger Ruhe vertragen wird, der andre, indem die in einer gegebenen Zeit mögliche Leistung untersucht wird, führte erst die neuere französische Schule den am Anfang des Abschnittes beigebrachten Kraftbegriff auf, unter dessen Allgemeinheit sowohl die Fälle der Bewegung, als des Gleichgewichtes subsumiren.

Ob das einfache Produkt aus Masse und Geschwindigkeit ein



richtiges Kraftmaass gebe, oder ob dieses dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, war ebenfalls seit Leibnitz lebhaftest besprochen worden. Des Cartes sagt hierbei unter Anderm: „Weil Gott die Theile der Materie bei ihrer Erschaffung verschieden bewegte und diese ganze Materie auf dieselbe Weise und in demselben Verhältniss, als er sie erschuf, erhält, so entspricht die Annahme der Vernunft am meisten, dass immer gleichviel Bewegung in der Materie erhalten bleibe.“ Diese Behauptung, dass in der Natur an bewegender Kraft nichts verloren gehe, gestand auch Leibnitz zu, änderte aber das hierbei angenommene Maass der bewegenden Kraft aus dem Produkt der Masse und Geschwindigkeit in dasjenige der Masse und des Quadrates der Geschwindigkeit um. Seit d'Alembert 1743 hat man den Zwiespalt dahin versöhnt, dass die Bewegung erzeugthabenden Kräfte den Produkten aus Masse und Geschwindigkeit proportional sind, wenn die Geschwindigkeiten so bestimmt sind, wie sie nach gleichdauernden Krafteinwirkungen hervortreten, dass aber die Kräfte den Produkten aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional sind, wenn die nach Zurücklegung gleich grosser Wege erreichten Geschwindigkeiten in Betracht kommen.

Vermöge seiner lebendigen Kraft kann ein bewegter Körper bestimmte Widerstände  $W$  durch eine gewisse Strecke  $S$  besiegen, bevor er durch die hierbei erfolgende Bewegungsabgabe zur Ruhe kommt, wenn  $\frac{MC^2}{2} = WS$ , woraus  $W = \frac{MC^2}{2S}$ ,  $S = \frac{MC^2}{2W}$ ,  $\frac{1}{2}MC^2 - WS = 0$ , oder wenn  $\frac{1}{2}MC^2 > WS$ ,  $\frac{1}{2}MC^2 - WS = n$ , so dass dem Körper von der lebendigen Kraft  $MC^2$  nach Bewältigung des Widerstandes  $W$  durch die Strecke  $S$  noch die Wirkungsfähigkeit  $n$  verbleibt.

5. Arbeiten, welche einander mechanisch völlig äquivalent sind, können in sehr verschiedener Zeitlänge geschehen, ohne dass dadurch ihr absoluter Werth verändert wird. Wohl aber ist ihre relative Bedeutung für besondere Zwecke in einer in der allgemeinen Mechanik nicht diskutirbaren Weise hiervon abhängig, und ausserdem steht der Aufwand von Materie und Bewegung für Erzeugung einer bestimmten Kraftleistung zur Anzahl ihrer in gegebener Zeit verlangten Effekte, sowie zur zeitlichen Andauer der Kraftbethätigung in geradem Verhältniss, was namentlich in organischen Kraftmagazinen und Leistungen leicht verständlich erscheint.

6. Handelt es sich um festverbundene Systeme materieller Punkte, so ist vorerst festzustellen, dass eben diese Verbindung



auf innere (Molekular-) Kräfte zurückweist, welche jedoch in ihrer Wechselwirkung die Quantität der Bewegung des ganzen Systems nicht beeinflussen, indem diese bloss bedingt wird von der Summe der Antriebe der äusseren in gleicher Richtung wirkenden Kräfte. Daraus erwächst unmittelbar, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunkts eines materiellen Systems nicht von der Thätigkeit der inneren Kräfte, sondern nach Richtung und Grösse von der algebraischen Summe der äusseren Kräfte abhängt. Diesen Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts sprach zuerst Newton aus.

Bezeichnet man mit  $P$  und  $S$  eine von Aussen wirkende Kraft und den durch sie veranlassten Weg, mit  $p$  und  $s$  aber die Molekularkraft eines Punktes  $m$ , sowie die hiedurch gesetzte Bewegung,

so ist  $\frac{1}{2} m c^2 = PS + ps$  } und ebenso für einen andern

Punkt  $\frac{1}{2} m, c,^2 = P, S, + p s, \}$   $\frac{1}{2} (m c^2 + m, c,^2) = PS + P, S, +$

$p(s + s,)$ ,  $s + s,$  ist aber nichts andres als der Unterschied der ursprünglichen Entfernung  $e$  der Punkte  $m m,$  und ihrer Entfernung

$e,$  nach Zurücklegung der Wege  $s s,$ , folglich  $\frac{1}{2} (m c^2 + m, c,^2) =$

$PS + P, S, + p(e - e,)$ , worin  $e - e,$  positiv wird, wenn die Molekularkräfte anziehend wirken und zugleich eine Annäherung der sich anziehenden Punkte erfolgt, oder, wenn die inneren Kräfte abstossend wirken und gleichzeitig eine Entfernung beider Punkte statt hat, dagegen negativ, wenn bei anziehenden Molekularkräften eine Entfernung, oder bei abstossenden Molekularkräften eine Annäherung der betreffenden Punkte gleichzeitig erfolgt.

Es ergibt sich schliesslich, dass die lebendige Kraft eines Systems materieller Punkte der Summe der Arbeiten der äussern und innern Kräfte gleich ist. —

7. Bei jeder Bewegung werden unter den Körpern, an und zwischen denen dieselbe verläuft, Gegenkräfte frei, welche als Widerstände sie aufheben, schwächen oder in ihrer Richtung abändern. Nicht immer wirken dieselben, wie die gewöhnliche Auffassung des Begriffs anzunehmen geneigt ist, nachtheilig auf den Zweck der Bewegung; denn wird auch deren mechanisches Moment vermindert, so kann sein, dass auf der andern Seite ein Vorthail errungen wird — wie etwa durch die die Trennung erschwerende, aber auch das Auseinanderfallen hindernde Zusammenhaltkraft selbständiger Körper oder das von der Adhäsion und Reibung gesicherte Anhaften heterogener Flächen —, welcher weit wichtiger ist, als die verlorene Bewegungsgrösse. In diesem Sinn bieten sich mehrere Gegenstände



der Betrachtung, welche an sich als positiv schätzbare Eigenschaften der Körper beurtheilt zu werden pflegen.

8. *Cohäsion* heisst die Kraft, mit welcher die Massentheilen eines Körpers zu einem selbständigen Ganzen zusammenhalten, oder der Widerstand, mit dem sie äusseren Einflüssen, welche ihren Zusammenhang oder ihre Form ändern wollen, entgegen kämpfen. Diese Eigenschaft, namentlich an festen Körpern sehr merklich, hat verschiedene Grade der Intensität und äussert diese selbst wieder in abweichender Art je nach der Richtung des Angriffs. Man überblickt diese Fälle in folgender Anordnung.

1) *Absolute Festigkeit*, der Widerstand, welchen ein Körper dem Zerreissen leistet, erprobt, indem man Stäbe von bekanntem Querschnitt am einen Ende einspannt und am andren Ende Zugkräfte (Gewichte) anbringt, welche in der Achse des Körpers oder in einer in dieselbe fallenden Resultante wirkend, ihn zu verlängern oder zu zerreißen streben. Die hierauf folgende Ausdehnung der Fasern ist, sofern sie nur gering und die Einwirkungsdauer kurz war, von einer ebenso starken Zusammenziehung gefolgt, sobald die Einwirkung der Kraft aufgehoben wird. Diese Eigenschaft der Körper, mit derselben Gewalt in ihre frühere Dimension, Form und Lage zurückzukehren, mit welcher sie darin gestört wurden, heisst ihre *Elastizität*. Sie kommt in sehr schwachem Grad wahrscheinlich jedem Stoff zu, in höherem nur wenigen, wie Stahl, Elfenbein, Kautschouk. Die Kraft, welche eine dauernde Formänderung setzt, bestimmt die *Elastizitätsgrösse* und mit der hierdurch hervorgerufenen grössten Dehnung ist die *Elastizitätsgrenze* des Körpers erreicht. Die *Elastizität* ist im Allgemeinen der erfahrenen Zusammendrückung oder Ausdehnung proportional. Den Quotienten aus der spezifischen Spannung einer einzelnen Faser  $\sigma$  durch die entsprechende Ausdehnung oder Verkürzung des ganzen Körpers  $\lambda$  nennt man den *Elastizitätscoefficienten* oder *Elastizitätsmodulus* des betreffenden Materiales  $E = \frac{\sigma}{\lambda}$  und findet ihn für  $\lambda = 1$

$E = \sigma$ , d. h. als die Kraft, durch welche ein Prisma von einheitlichem Querschnitt auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt würde. Für 1 Quadratmillimeter Querschnitt ist dieser übrigens bloss ideale Elastizitätsmodulus für Silberdraht 7300, Stahl 18600, Schmiedeeisen 15400 Kilogramm; dabei ist mittlere Temperatur angenommen, denn der Modulus mindert sich mit der Wärmezunahme.

Im Gegensatz zu höherer Elastizität bezeichnet man die in einem eigenthümlich labilen Gleichgewichtszustand der Molekularkräfte beruhende Eigenschaft mancher Körper, wie raschverköhlten Glases,



schon durch geringen Anlass Form und Zusammenhang aufzugeben, als Sprödigkeit.

Die absolute Festigkeit steht in geradem Verhältniss zum Quadrat des Durchmessers und beträgt für 1 Quadratcentimeter Querschnitt von den Stoffen:

|                      |                 |       |
|----------------------|-----------------|-------|
| Stahl                | in Kilogrammen: | 10820 |
| Schmiedeeisen        | „               | 5343  |
| deutsches Gusseisen  | „               | 4816  |
| englisches Gusseisen | „               | 6611  |
| Eisendraht           | „               | 6434  |
| Silber               | „               | 2884  |
| Kupfer               | „               | 2325  |
| Messing              | „               | 1265  |
| Zink                 | „               | 198   |
| Blei                 | „               | 62    |
| Eichenholz           | „               | 1819  |
| Weissbuche           | „               | 1395  |
| Weisstanne           | „               | 957   |
| Mahagoni             | „               | 600   |
| Hanfseile            | „               | 615   |

Von diesen Gewichten, welche Grenzwerte sind, darf in der Ruhe den Metallen nur der vierte, den Hölzern nur der dritte Theil als beständige Last zugemuthet werden, sonst erfolgt ein der Zeit der Belastung proportionales Verlängern.

2) Relative Festigkeit, der Widerstand, welcher von den Körpern dem Zerbrechen entgegengesetzt wird, erprobt, indem man parallelepipedische Stücke an den Enden unterstützt und in der Mitte belastet. Hierbei werden die an den konvexen Seiten der vor dem Bruch eintretenden Biegung liegenden Fasern verlängert, diejenigen an der konkaven verkürzt; die sogenannte neutrale Faserschicht bildet im Innern den Uebergang zwischen beiden und erleidet zunächst weder Verlängerung noch Verkürzung. Den geometrischen Ort der materiellen Punkte, welche ursprünglich die geradlinige Achse bildeten, nennt man die elastische Linie; sie ist eine Kurve einfacher Krümmung, liegt in der Ebene der Kräfte und enthält alle Schwerpunkte der zu ihr senkrechten Querschnitte. Die neutrale Faserschicht ist eine cylindrische Fläche. Die relative Festigkeit steht in geradem Verhältniss zur Breite und zum Quadrat der Höhe, in verkehrtem zur Länge. Drückt man in der diesen Worten entsprechenden Formel  $\frac{p b h^2}{l}$  mit  $b$  die Breite, mit  $h$  die Höhe, mit  $l$  den Abstand der Unterstützungspunkte in Centimetern, mit  $p$  aber beziehungsweise eines der folgenden Gewichte in Kilogramm aus,



so tragen  $\frac{2}{3}$  des letzteren folgende Stoffe ohne Schaden. Schmiedeeisen 1252, Gusseisen 1076, Messing 471, Eiche 272, Tanne 255, Buche 166. — Uebrigens kommt hier sehr viel auf die Art der Unterstützung und die Vertheilung der Last an. So trägt ein horizontaler Balken, welcher nur am einen Ende befestigt ist, am andren Ende nur den vierten Theil seiner sonstigen Last, bei gleichmässiger Vertheilung aber das Doppelte. Auch darf bei ausgedehnteren Balken deren eigenes Gewicht nicht vergessen werden. Erfahrungsgemäss ist, dass metallene Hohlcyliner mehr tragen, als massive gleichen Gewichts, und dass man aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt den stärksten Balken findet, indem man den Durchmesser in drei gleiche Stücke theilt, in jedem Theilpunkt auf ihn eine Senkrechte einmal aufwärts, einmal abwärts errichtet und deren in der Peripherie gelegenen Endpunkte mit den Endpunkten des Diameter verbindet.

3) Rückwirkende Festigkeit, der Widerstand, welcher gegen das Zerdrücken geleistet wird, erprobt durch Belastung von vollkommen unterstützten Würfeln, abhängig von Gefüge und Faserichtung, steht unter sonst gleichen Umständen in geradem Verhältniss zur Breite und zum Kubus der Dicke, in verkehrtem zum Quadrat der Länge. Ein Cubikcentimeter

|                              |              |
|------------------------------|--------------|
| Gusseisen wird zerdrückt von | 7954 Kilogr. |
| Messing „ „ „                | 10830 „      |
| Sandstein „ „ „              | 544 „        |
| Granit „ „ „                 | 526 „        |
| Marmor „ „ „                 | 520 „        |
| Kalkstein „ „ „              | 505 „        |
| Ziegel „ „ „                 | 52 „         |
| Eichenholz „ „ „             | 295 „        |

Hiervon darf für dauernde Belastung bei Metallen nur  $\frac{1}{4}$  —  $\frac{1}{7}$

bei Holz und Stein nur  $\frac{1}{10}$  den betreffenden Stoffen zugemuthet werden.

Vergleichen wir die absolute (a), relative (r) und rückwirkende (u) Festigkeit für einige Körper z. B. Eisen (Guss) und Eiche, so steht im ersten Fall  $a : r : u = 4816 : 1076 : 7954$

$$(\text{nahe :}) = 5000 : 1000 : 8000 = 5 : 1 : 8$$

im zweiten  $a : r : u = 1819 : 272 : 295$

$$(\text{nahe :}) = 1800 : 300 : 300 = 6 : 1 : 1$$

4) Schubfestigkeit, der Widerstand, welcher dem Abdrücken und Uebereinanderverschieben paralleler Quer-



schnitte geleistet wird. Der Modulus der Schubfestigkeit ist  $\frac{2}{5}$  des Modulus der absoluten Festigkeit.

5) Drehfestigkeit, der Widerstand einerseits befestigter Körper, von überwiegender Längenausdehnung (Seile, Saiten, Drähte) gegen eine am andern Ende statthabende Drehung. Innerhalb der Elastizitätsgrenzen ist dieser Widerstand dem Drehungswinkel proportional. Die zum Abdrehen nöthige Kraft steht in geradem Verhältniss zur vierten Potenz des Durchmessers, in verkehrtem zur Länge. Hierher gehört auch der Widerstand gespannter Saiten gegen Druck, welcher dem letzteren proportional ist und derjenige elastischer Federn gegen Zusammendrückung und Auseinanderziehung, der innerhalb der Elastizitätsgrenzen der geschehenen Ortsveränderung entspricht.

9. Unter Adhäsion verstehen wir die Kraft, mit welcher die Molekules zweier heterogener sehr ebener, einander innig berührender Körperoberflächen einander anziehen und festhalten. Der Widerstand, welchen zwei adhäreirende Stoffe der Trennung leisten, ist manchmal, wie bei Glas und Wasser, so gross, dass beim gewaltsamen Auseinanderreissen nicht er, sondern die Cohäsion überwunden wird, indem Wasser, aus seinem Zusammenhang gerissen, am Glas hängen bleibt. Nach den Wägungen von Buys-Ballot beträgt bei 10° R. auf 1 Quadratcentim. Berührungsfläche die Adhäsion zwischen Glas und Wasser 0,5568 Gramm, nimmt aber in höherer Temperatur nach der Formel  $0,5568 - 0,00108 t^0$  ab.

Dass die Adhäsion eine reine Molekularwirkung sei, geht daraus hervor, dass sie nur bei vollkommenster ungestörter Berührung zur Erweisung kommt und von den Massen der die Berührungsflächen darbietenden Körper ganz unabhängig ist.

10. Der im gewöhnlichen Leben, wie in der Maschinenkunde äusserst wichtige Widerstand der Reibung knüpft sich auch an die Berührungsflächen zweier oder mehrerer Körper, hat jedoch nicht in molekularer Attraktion, sondern darin seinen Grund, dass die Flächen nie vollkommen glatt sind, sondern, wenn auch nicht sichtbare, Erhebungen und Vertiefungen besitzen, welche beziehungsweise ineinander einsinken, so dass beim Uebereinanderbewegen die Hervorragungen entweder abgebrochen oder umgebogen oder über die Vertiefungen heraufgehoben werden müssen. Die Grösse der Reibung hängt von dem Druck ab, unter welchem die mehr oder weniger innige Berührung der Körper statthat, dagegen kaum von der Ausdehnung der Berührungsflächen oder von der Geschwindigkeit ihres Uebereinandergleitens. Jedoch scheint die Dauer der Berührung insofern von Einfluss, als die anfängliche Besiegung der



Reibung grössere Schwierigkeit verursacht, als während der verlaufenden Bewegung, vielleicht weil bei länger dauerndem Druck ein tieferes Einsinken der Hervorragungen stattfand, und weil hier die Molekularattraktionen günstigere Gelegenheit zur Entfaltung fanden, somit der Widerstand der Reibung durch den der Adhäsion vermehrt wird.

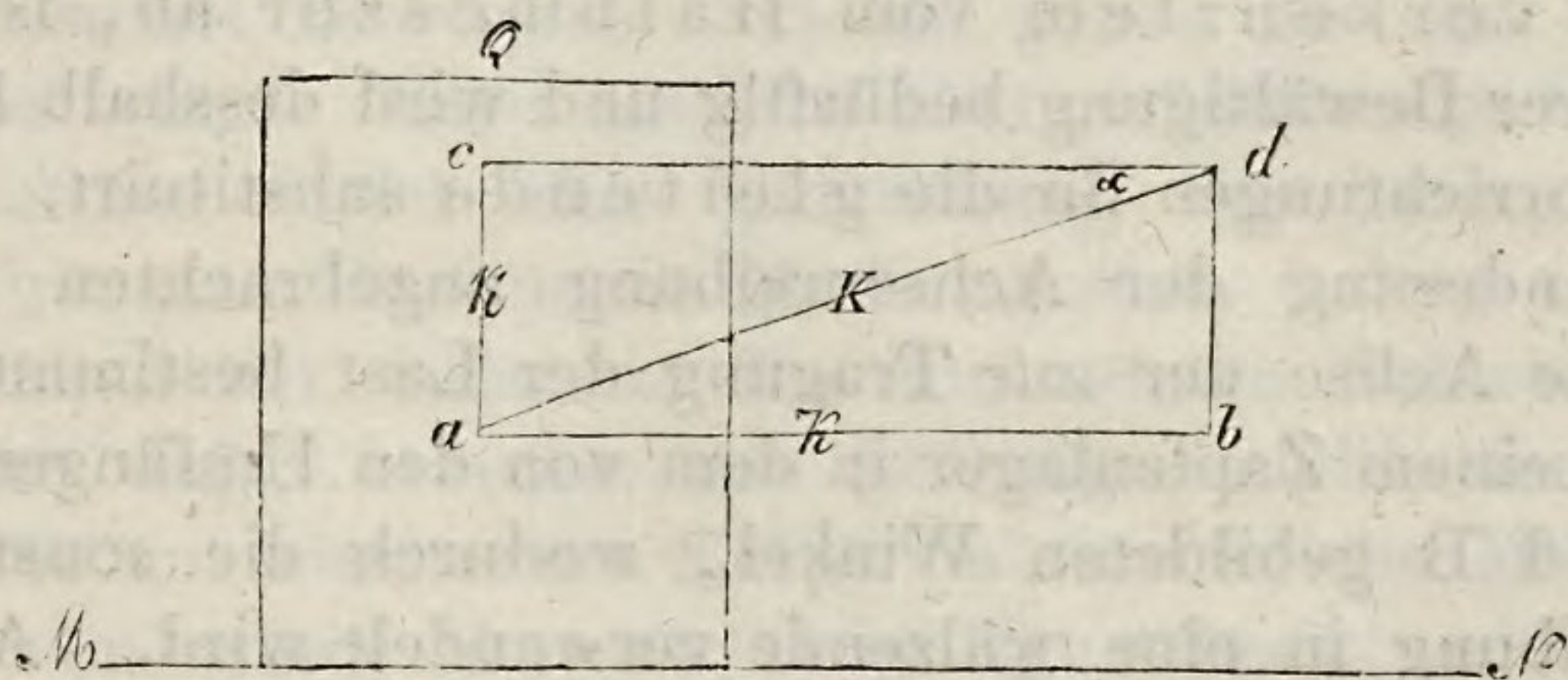
Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung, je nachdem gleichzeitige Berührung in einer Fläche oder nur in einer Linie besteht.

Da die Reibung  $F$  dem Druck  $P$  proportional ist, so steht  $F : f = P : p$  folglich  $F = \frac{f}{p} P$ , worin der Quotient  $\frac{f}{p}$  Reibungscoefficient heisst. Dieser Coefficient, mit welchem zur Auffindung der Reibungsgrösse eines besondern Falles der herrschende Druck multipliziert werden muss, ist experimentell mittels des Tribometer für viele Stoffe bestimmt. So beträgt die Reibung von Buche auf Buche 0,36 des Druckes, Eiche auf Eiche

|                       |                 |                 |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| bei parallelen Fasern | 0,48            | des Druckes     |
| „ senkrechten „       | 0,336           | „               |
| „ gekreuzten „        | 0,32            | „               |
| Buche auf Eiche       | 0,37            | „               |
| Eisen auf Eiche       | 0,626           | „               |
| Eiche auf Eisen       | 0,372           | „               |
| Eisen auf Eisen       | 0,145           | „               |
| Stahl auf Gusseisen   | 0,202           | „               |
| Reibung auf Sand      | 0,5—0,8         | „               |
| horizontaler Chaussee | $\frac{1}{15}$  | $\frac{1}{20}$  |
| Eisenbahn             | $\frac{1}{189}$ | $\frac{1}{240}$ |

Soll der Körper  $Q$  auf der Ebene  $MN$  mittels der im Schwerpunkt  $a$  angreifenden Kraft  $K$  fortgezogen werden, so zerlegt man  $K$  in die Seitenkräfte  $K$  und  $k$ , deren letzte, senkrecht zur Ebene, den Druck des Körpers auf dieselbe so vermindert, dass er nur noch  $Q - k$  ist; die erstere stellt die Reibungs-

Fig. 28.



grösse dar und ist desshalb  $K = \frac{f}{p} (Q - k)$ .



Nach Fig. 28 steht  $k : K = ac : ad$ ,  $k = K \sin \alpha$

$K : K = ab : ad$ ,  $K = K \cdot \cos \alpha$  folglich

$$K \cdot \cos \alpha = \frac{f}{p} (Q - K \cdot \sin \alpha) = \frac{f}{p} Q - \frac{f}{p} K \cdot \sin \alpha$$

$$K \left( \cos \alpha + \frac{f}{p} \sin \alpha \right) = \frac{f}{p} Q$$

$$K = \frac{\frac{f}{p} \cdot Q}{\cos \alpha + \frac{f}{p} \sin \alpha}, \text{ welcher Ausdruck für } \alpha = 180^\circ$$

d. h. bei einer der Ebene MN parallelen Krafrichtung  $= \frac{f}{p} Q$  wird

und seinen Minimalwerth annimmt, wenn  $\cos \alpha + \frac{f}{p} \sin \alpha$  ein Maxi-

mum wird. Dies ist der Fall für  $\frac{f}{p} = \tan \alpha$ , indem dann

$$\cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{und } K = \tan \alpha \cdot Q : \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot Q}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \alpha} = Q \sin \alpha.$$

Eine gleitende Reibung ist es auch, wenn ein cylindrischer Körper in einer concentrischen Höhlung von nahe gleichem Durchmesser sich dreht. (Zapfenreibung. Prony's Bremsdynamometer.) An letzterem misst die Formel  $2 r \pi \cdot Q \cdot l \cdot n$  die mechanische Arbeit der Sekunde, wenn  $r$  den Halbmesser der Welle,  $n$  die Anzahl ihrer Umdrehungen,  $l$  die Länge des Hebelarms vom Wellencentrum an gerechnet, und  $Q$  das an dessen Ende befestigte Gewicht bedeutet.

In der rollenden oder wälzenden Reibung kommt die Unterlage in jedem Moment mit neuen Punkten des rollenden Körpers in Berührung. Sie hängt in geradem Verhältniss vom Druck, in verkehrtem vom Halbmesser ab, ist geringerer Kraft zu ihrer Bewältigung bedürftig und wird desshalb häufig durch besondere Vorrichtungen für die gleitende substituirt. So bei den zur Verminderung der Achsenreibung angebrachten Friktionsrollen. Die Achse der zur Tragung der Last bestimmten Rolle C ruht statt in einem Zapfenlager in dem von den Umfängen der beiden Rollen A und B gebildeten Winkel, wodurch die sonst vorhandene Zapfenreibung in eine wälzende verwandelt wird. Allerdings übernehmen die Achsen der Rollen A und B eine gleitende Reibung; aber sie ist weit geringer, als die aufgehobene von C. Denn ist  $P$  die von der Rolle C getragene Last,  $F$  der Reibungscoefficient,  $u$  der Achsenum-



fang der Rolle C, so ist die an ihm statthabende gleitende Reibung  $F P$  und die daselbst verrichtete mechanische Arbeit  $F P u = K$ . Ist ferner  $U$  der Umfang der Rollen A und B, so machen diese in derselben Zeit  $\frac{u}{U} = \frac{1}{n}$  Umdrehungen, in welcher die Achse von C eine vollendet; folglich wird die Reibung an den Achsen der Friktionsrollen durch die mechanische Arbeit  $k = \frac{1}{n} F P u' = \frac{u}{U} F P u' = \frac{u'}{U} F P u = \frac{u'}{U} K$ , worin  $u'$ , den Umfang der Friktionsrollenachsen bedeutet, überwunden, und ist also der Reibungswiderstand in dem Verhältniss  $\frac{u'}{U} = \frac{r'}{R}$  vermindert, in welchem der Halbmesser der Friktionsrollenachse kleiner ist, als der Halbmesser der Friktionsrolle selber.

**11.** Die Steifigkeit der Seile gibt an einigen elementaren Vorrichtungen der Mechanik insofern ein Bewegungshinderniss ab, als dadurch ein vollkommen kreisförmig concentrisches Umschlingen cylindrischer Flächen unmöglich gemacht ist. Ein Seil vom Durchmesser  $d$ , um einen Cylinder geschlungen, einerseits mit der Kraft  $Q$ , anderseits mit  $P$  gespannt, so dass der Cylinder bei Ueberschuss der letzteren um seine Achse rotiren soll, bildet am Uebergang auf die Cylinderfläche statt eines Bogens einen Winkel, wodurch die Entfernung der Kraft  $Q$  von der Momentenachse des Cylinders grösser wird, als der Radius des theoretischen Seilbogens und zwar um so mehr, je beträchtlicher der Querschnitt des Seiles ist, wonach das statische Moment von  $Q$  wird  $= Q (r + k d^2)$ .

**12.** Der umgebende Stoff, in welchem sich ein Körper bewegt — das Mittel, *medium* — nimmt einen Theil der Bewegung an und vermindert um diesen die Bewegungsgrösse des durchgehenden oder eindringenden Körpers. War dieser in beschleunigter Bewegung begriffen, so kann sein, dass durch den Widerstand in jeder Zeiteinheit ebensoviel Bewegung verloren geht, als die beschleunigende Kraft beibringt. Dann resultirt eine gleichförmige Geschwindigkeit. Ueberdies findet eine Umkreisung des bewegten Körpers von den verdrängten Theilen des Mediums statt, welche sich bei leichter Beweglichkeit der Substanz den entfernteren Schichten überträgt und dadurch kaum berechenbare Störungscomplicationen setzt. Die Tiefe, bis zu welcher ein Körper in eine weiche Masse eindringt, hängt ab von seiner Masse, vom Quadrat seiner Geschwindigkeit, von der Dichte des Mittels. Auch die Gestalt des bewegten Körpers und die Anordnung der dem Medium dargebotenen Flächen ist in diesem Betracht nicht ohne Einfluss.

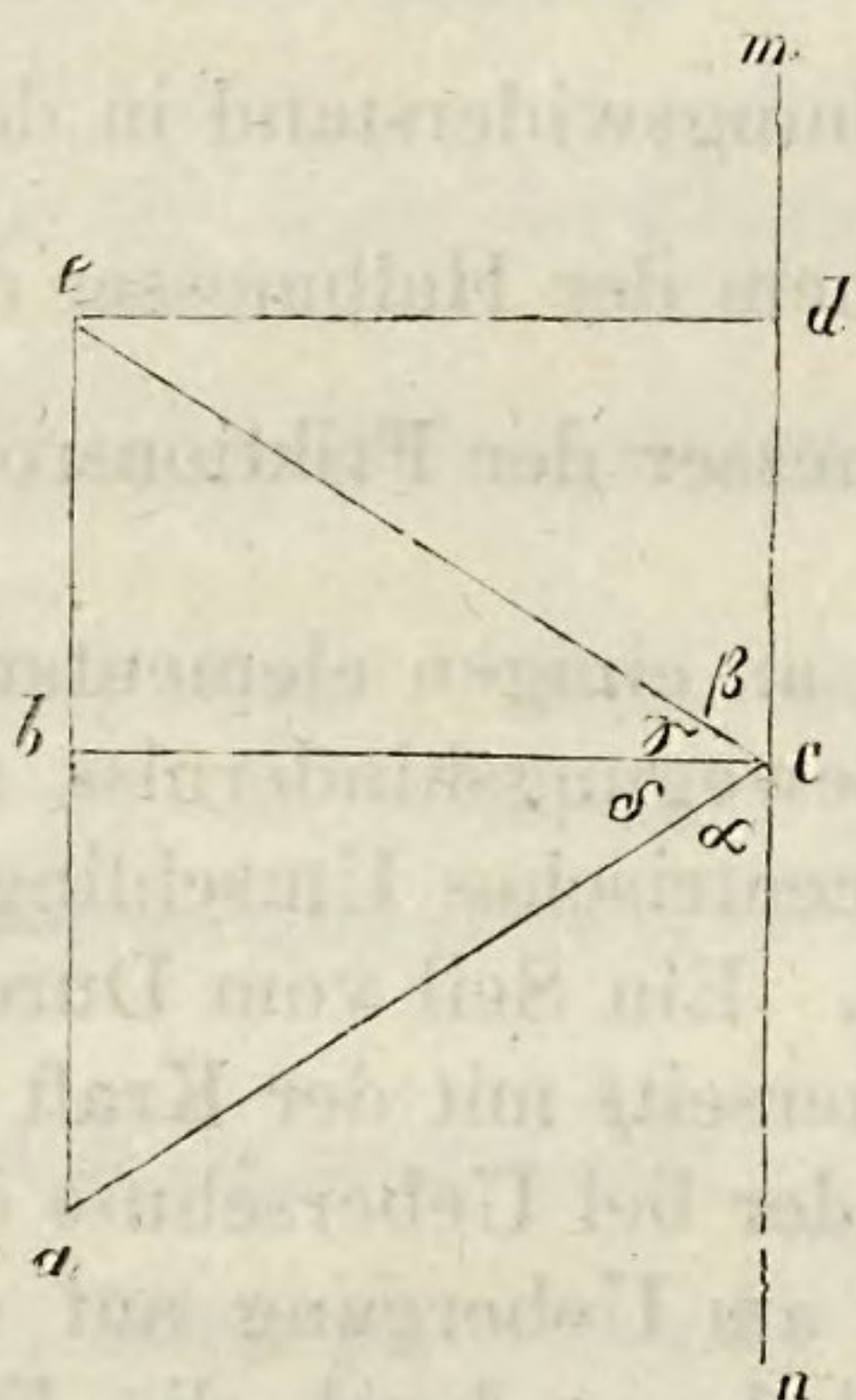


**13.** Der dem bewegten Körper von einem festen Stoff geleistete Widerstand leitet zur Lehre vom Stoss über.

Stösst ein bewegter Körper gegen eine feste Wand, so hängt das Resultat ab von dem Winkel, welchen die Bewegungsrichtung mit der Anprallebene macht, und davon, ob der anprallende Körper elastisch oder unelastisch ist. Danach unterscheidet man folgende Fälle:

- 1) Die Bewegung eines unelastischen Körpers, welcher senkrecht an eine Wand stösst, wird durch den Widerstand völlig aufgehoben und der Körper kommt am Fuss der Wand zur Ruhe.

Fig. 29.



- 2) Stösst ein unelastischer Körper in der Richtung ac, also unter dem Winkel  $\alpha$ , gegen die Wand mn, so kann man sich ac als die Mittelkraft der Seitenkräfte bc und ab vorstellen. Davon wirkt bc senkrecht zur Ebene, mn wird also genügende Cohäsion derselben vorausgesetzt aufgehoben, ab aber bewirkt, dass der Körper längs der Wand den Weg  $cd = ab$  macht.

- 3) Der elastische Körper wird im Augenblick des senkrechten Anstosses komprimirt. Weil aber seine Molekules sich sogleich mit der gleichen Kraft wieder ausdehnen, so springt er mit unveränderter Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung zurück.

- 4) Fällt ein elastischer Körper unter dem Winkel  $\alpha$  ein, so zerlegt man ac in die beiden Kräfte bc und ab. Erstre, senkrecht auf mn, würde ihn nach dem Stoss zur Bewegung cb von der Wand weg veranlassen, ab, parallel zu mn, ihn von c nach d treiben; er verfolgt desshalb den Weg der Diagonale ce des aus beiden ihm zugemutheten Bewegungsrichtungen konstruirten Parallelogrammes. Wegen  $\triangle bec \cong bac$  ist  $\angle \gamma = \delta$  oder auch  $\beta = \alpha$ , d. h. der Zurückwerfungswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

**14.** Eine allgemeinere, vom Begriff des Widerstandes sich emancipirende Betrachtung des Stosses macht die Annahme, dass die in Frage kommenden Körper beweglich sind, es sich also wesentlich um Bewegungsübertragung handle.

Der Stoss heisst central oder gerade, wenn die Bewegungsrichtungen in einer Geraden durch die Schwerpunkte beider Körper gehen, oder wenn die Verbindungslinie beider Schwerpunkte auf der beim Stoss hergestellten Berührungsebene senkrecht steht, excentrisch oder schief, wobei neben der Bewegung im Raum eine Rotation um eine im bewegten Körper gelegene



Achse erzeugt werden kann, wenn die Verbindungslinie der Schwerpunkte mit der Bewegungsrichtung einen Winkel macht.

Vor Allem ist auseinanderzuhalten, ob die zusammentreffenden Körper Gestalt und Umfang durch den Stoss gar nicht ändern — unelastisch —, oder ob diess geschieht, aber nach dem momentanen Einfluss durch innre Kraft sogleich die ursprünglichen Verhältnisse wieder hergestellt werden — vollkommen elastisch. In diesem Fall nehmen auch die im Innern befindlichen Molekules an der Wirkung der Kraft Theil, indem ihnen in Form von Verschiebung oder Zusammendrückung Bewegung mitgetheilt wird. — In Wirklichkeit wird keiner dieser beiden idealen Zustände vollkommen erreicht, man substituirt jedoch annähernd zu den Versuchen feuchten Thon als unelastische, Elfenbein als elastische Masse.

**15.** Die Bewegungsgrössen vor und nach dem Stoss hängen von den Faktoren derselben, Masse und Geschwindigkeit, ab. Bezeichnen wir die Massen der beiden zusammenstossenden Körper und ihre Geschwindigkeiten beziehungsweise mit  $M, m, C, c$ , so sind ihre Bewegungsgrössen vor dem Stoss  $MC, mc$ , nach dem Stoss ihre gemeinsame  $x(M + m)$ , weil sie dann als eine aus der Summe der gegebenen Massen gebildete gemeinsame Masse mit der Geschwindigkeit  $x = \frac{MC + mc}{M + m}$  sich weiter bewegen. —

Dieser Ausdruck wird für  $M = m$ ,  $x = \frac{M(C + c)}{2M} = \frac{C + c}{2}$  d. h., trifft ein bewegter Körper auf einen langsamer voranlaufenden von gleicher Masse, so theilt er ihm Geschwindigkeit mit und schliesslich gehen beide mit der halben Summe ihrer anfänglichen Geschwindigkeiten in derselben Richtung fort.

Für  $M = m$ ,  $c = 0$  wird  $x = \frac{MC}{2M} = \frac{1}{2} C$  d. h. stösst ein bewegter Körper auf einen ruhenden, so erfolgt eine Bewegung in der Richtung des erstren mit seiner halben Geschwindigkeit.

Bei entgegengesetzter Bewegung wird  $x = \frac{MC - mc}{M + m}$ ,  
woraus für  $M = m$ ,  $C = c$   $MC = mc$   $x = 0$  d. h.,  
 $M : m = c : C$

zwei unelastische Körper von gleicher Masse und gleicher Geschwindigkeit, aber mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung centraler Art kommen durch den Stoss ebenso gut zur Ruhe, als wenn bei ungleichen Massen diese sich verkehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten hätten.

Für  $M = m$  wird  $x = \frac{M(C - c)}{2M} = \frac{C - c}{2}$  d. h., zwei mit



ungleicher Geschwindigkeit einander entgegenbewegte Körper gleicher Masse nehmen nach dem Stoss eine Bewegung in der Richtung des vorher schneller bewegten Körpers an, und ihre gemeinsame Geschwindigkeit ist die Hälfte der Differenz der beiden vorherigen Geschwindigkeiten. — Dasselbe findet statt bei ungleichen Massen und in verkehrtem Verhältnisse ungleichen Geschwindigkeiten. —

Für  $C = c$  wird  $x = \frac{C(M - m)}{M + m}$  d. h., zwei Körper von un-

gleichen Massen, welche in entgegengesetzter Richtung mit gleichen Geschwindigkeiten zusammentreffen, nehmen eine der grösseren Masse entsprechende Bewegungsrichtung an mit einer Geschwindigkeit, welche gefunden wird, indem man ihre vorherige gleiche Geschwindigkeit multiplicirt mit dem Quotienten der Summe ihrer Massen in deren Differenz.

**16.** Bei gleicher Richtung ist die Bewegungsgrösse der beiden nach dem Stoss nur Eine Masse bildenden Körper

$$(M + m) \frac{MC + mc}{M + m} = MC + mc \text{ d. h., es wird an Bewegungs-}$$

grösse nichts verloren. — Bei entgegengesetzter Richtung berechnet sich der beiderseitige Verlust folgendermaassen. Die Bewegungsgrösse des mächtigeren Körpers nach dem Stoss ist

$$Mx = M \frac{MC - mc}{M + m}, \text{ also sein Verlust } MC - \frac{M(MC - mc)}{M + m} =$$

$$\frac{MMC + MmC - MMC + Mmc}{M + m} = \frac{Mm(C + c)}{M + m}, \text{ für den an-}$$

dern ist  $mx = m \frac{MC - mc}{M + m}$ , der Verlust aber, weil er seine eigene

Bewegung ganz verliert und dazu eine seiner vorigen Richtung entgegengesetzte annimmt, welche auch als Verlust aufzufassen ist

$$mc + \frac{m(MC - mc)}{M + m} = \frac{Mmc + mmc + MmC - mmc}{M + m} =$$

$$\frac{Mm(C + c)}{M + m}. \text{ Der Verlust beider Körper ist also gleich gross.}$$

**17.** Beim Zusammenstoss elastischer Körper ertheilen die gepressten, aber im nächsten Moment einander abstossenden Molekules durch diese Expansion jedem Körper einen seiner ursprünglichen Bewegung entgegengesetzten Stoss und deshalb ist der Verlust der doppelte, als bei unelastischen. Somit behält der

Gewichtigere die Bewegungsgrösse  $MC - \frac{2Mm(C + c)}{M + m} =$



$$\frac{M C (M - m) - 2 M m c}{M + m} \quad (\text{I., der zweite } m c - \frac{2 M m (C + c)}{M + m} =$$

$$\frac{- m c (M - m) - 2 M m C}{M + m} \quad (\text{II.}$$

Für  $M = m$ ,  $C = c$  wird die Bewegungsgrösse des ersten Körpers nach dem Stoss  $\frac{- 2 M^2 C}{2 M} = - M C$  und des zweiten  $\frac{- 2 M^2 C}{2 M} = - M C$  d. h., stossen zwei elastische Körper von gleichen Massen und gleichen Geschwindigkeiten zusammen, so springen sie mit denselben Bewegungsgrössen in beziehungsweise umgekehrter Richtung zurück.

Für  $M = m$  steht (I.  $= \frac{- 2 M^2 c}{2 M} = - M c$  (II.  $= \frac{- 2 m^2 C}{2 m} = - m C$  d. h., stossen zwei elastische Körper von gleichen Massen aber ungleichen Geschwindigkeiten aufeinander, so springen sie mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück. Denn nachdem beide, wenn sie unelastisch wären, die halbe Differenz ihrer Geschwindigkeiten annähmen, bewirkt die Reaktion der Elastizität, dass der verlierende Körper noch einmal soviel verliert, der gewinnende aber ebensoviel mehr gewinnt.

Für  $M = m$   $- c = + c'$  kommt I.  $= \frac{2 M^2 c}{2 M} = M c$  II.  $= \frac{- 2 M^2 C}{2 M} = - M C$  d. h., bewegt sich ein elastischer Körper einem andern gleicher Masse, aber geringerer Geschwindigkeit nach, so gehen beide nach dem Stoss in derselben Richtung aber mit verwechselten Geschwindigkeiten weiter.

Für  $M = m$   $c = 0$  ist I.  $= 0$  II.  $= \frac{- 2 m^2 C}{2 m} = - m C$  d. h., stösst ein bewegter elastischer Körper auf einen ruhenden von gleicher Masse, so wird die Bewegung des ersten durch den Stoss aufgehoben, der zweite aber nimmt die Geschwindigkeit des ersten nach einer Richtung an, welche der in den früheren Betrachtungen dem zweiten beigelegten Richtung entgegengesetzt ist.

18. Weil die Bewegungsgrösse des ersten Körpers durch den Stoss den Verlust  $M \frac{2 m (C + c)}{M + m}$  erleidet, so behält er die Geschwindigkeit  $x = C - \frac{2 m (C + c)}{M + m}$  und ähnlich der zweite  $y = c - \frac{2 M (C + c)}{M + m}$

Die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper vor dem



Stoss ist  $MC^2 + mc^2$  und nach dem Stoss  $M \left( C - \frac{2m(C+c)}{M+m} \right)^2 + m \left( c - \frac{2M(C+c)}{M+m} \right)^2$ , welcher letzterer Ausdruck sich folgendermaassen umwandeln lässt.

$$M \left( C^2 - \frac{4Cm(C+c)}{M+m} + \frac{4m^2(C^2 + 2cC + c^2)}{M^2 + 2mM + m^2} \right) + m \left( c^2 - \frac{4cM(C+c)}{M+m} + \frac{4M^2(C^2 + 2cC' + c^2)}{M^2 + 2mM + m^2} \right) = MC^2 + (-4C^2M^2m - 4C^2Mm^2 - 4CcmM^2 - 4Ccm^2M + 4C^2m^2M + 8Ccm^2M + 4c^2m^2M) : (M^2 + 2mM + m^2) + mc^2 + (-4CcM^2m - 4CcMm^2 - 4c^2M^2m - 4c^2Mm^2 + 4C^2M^2m + 8CcmM^2 + 4c^2M^2m) : (M^2 + 2mM + m^2)$$

$$= MC^2 + \frac{-4C^2M^2m - 4CcM^2m + 4CcMm^2 + 4c^2m^2M}{M^2 + 2mM + m^2} + mc^2 + \frac{4C^2M^2m + 4CcM^2m - 4CcMm^2 - 4c^2m^2M}{M^2 + 2mM + m^2}$$

$= MC^2 + mc^2$  d. h., an der lebendigen Kraft elastischer Körper wird durch den Stoss nichts verloren.

### Beispiele.

1. Aus einem Mühlengerinn fällt in jeder Sekunde eine Wassermenge von 20 Cubikfuss 6 Fuss hoch herab. Welche mechanische Arbeit thut dieses Wasser?

Gewicht eines c' Wasser = 66 Pfd. = 33 Kilogr.

$$20 \cdot 33 = 660 \text{ Kilogr.}$$

$$6' = 1,714^m \text{ (nahe)}$$

$$660 \cdot 1,714 = 1131,24 \text{ Kilogr.-M.}$$

$$= 15 \text{ Pferdekkräfte}$$

(rund.)

2. Wie viel beträgt die Arbeit von 1 Pfd. Steinkohlen, wenn durch die dabei entwickelte Wärme eine Eisenstange um 0,03 Meter ausgedehnt wurde und einen Druck von 8000 Kilogramm überwältigte?

$$0,03 \cdot 8000 = 240 \text{ Kilogramm-meter.}$$

3. Wie lang kann ein Lastträger, welcher gewohnt ist, eine Last von 30 Pfd. täglich 6 Stunden weit mit der Geschwindigkeit von 3' zu tragen, eine Last von 40 Pfd. mit einer Geschwindigkeit von  $2\frac{1}{2}'$  tragen, ohne sich im Ganzen mehr als gewöhnlich anzustrengen?



Gerstner behauptet, es sei erfahrungsgemäss die mechanische Leistung der Menschen aus der Formel  $K = k \left( 2 - \frac{v}{c} \right) \left( 2 - \frac{z}{t} \right)$  zu berechnen, worin  $k$  das mittlere Gewicht bedeutet, welches ein Mensch bei der mittleren Geschwindigkeit  $c$  während der mittleren Zeit  $t$  überwältigt, während  $K$  das Gewicht ist, welches er mit der aussergewöhnlichen Geschwindigkeit  $v$  während der Zeit  $z$  bewegt. Hier ist  $40 = 30 \left( 2 - \frac{2,5}{3} \right) \left( 2 - \frac{z}{6} \right)$  woraus  $z = 5,143$  Stund.

4. Welchen mechanischen Effekt kann eine 6 Pfd. schwere Kugel mit 90' Geschwindigkeit ausüben?

Weil einer Endgeschwindigkeit zu 90' ein Fallraum  $s = \frac{8100}{2 \cdot 30} = 135'$  entspricht, so übt jene Kugel einen mechanischen Effekt  $= 810$  Fusspfund (analog dem Begriff: Kilogrammometer gebildet), gleich der Hebung von 6 Pfd. auf 135' senkrechter Höhe. Dieselbe Zahl erhält man auch, wenn die Wirkungsfähigkeit  $\frac{P \cdot C^2}{2g} = \frac{6 \cdot 90^2}{2 \cdot 30} = 810$  berechnet wird.

5. Welche Wirkungsfähigkeit kommt der Kugel und dem Geschütz zu, wenn erstere 12 Kilogr. schwer mit 500 Meter Geschwindigkeit abgeschossen wird und das Gewicht des letzteren das Dreihundertfache desjenigen der Kugel beträgt?

$$\frac{12 \cdot 250000}{2 \cdot 9,81} = 152900 \text{ Kilogr.-Meter Wirkungsfähigkeit der Kugel.}$$

$$300 \cdot 12 \cdot x = 500 \cdot 12$$

$$x = 1\frac{2}{3} \text{ Meter Geschwindigkeit des Geschützes (Rückstoss.)}$$

$$\frac{25 \cdot 3600}{9 \cdot 2 \cdot 9,81} = 509 \text{ Wirkungsfähigkeit des Geschützes.}$$

6. Wie gross ist die Widerstandsfähigkeit eines Erdreiches, in welches ein 700 Pfd. schwerer Rammklotz, der 5' hoch herabfällt, in 20 Schlägen einen 400 Pfd. schweren Pfahl 6'' tief eintreibt?

$$c = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 5} = 17,7' \text{ Endgeschwindigkeit des Klotzes.}$$

$$700 : 700 + 400 = x : 17,7$$

$$x = \frac{700 \cdot 17,7}{1100} = 11,26' \text{ gemeinsame Geschwindigkeit von Klotz und Pfahl nach dem Stoss.}$$

$$\frac{0,5}{20} = 0,025' \text{ Eindringtiefe des Pfahles durch einen Schlag,}$$



$$s = \frac{c^2}{2g} = \frac{126,8}{2 \cdot 30} = 2,1' \text{ mögliche Steighöhe bei Umkehrung der Bewegungsrichtung.}$$

0,025 : 2,1 Verhältniss des Widerstandes der Schwere zu dem des Bodens. Das Erdreich setzt somit dem Eintreiben des Pfahles den 84fachen Widerstand, welcher von der Schwere der Hebung von Klotz und Pfahl gemacht würde, wonach für erstre Arbeit eine Kraft von  $84 \cdot 1100 = 92400$  Pfd. nöthig ist.

7. Wie hoch kann ein 150 Kilogr. schwerer Kolben gehoben werden, wenn eine Kraft von 180 Kilogramm zu Gebot steht, wovon jedoch der 9. Theil zur Ueberwindung der Reibung an den Cylinderwänden aufgebraucht wird?

$$150 \cdot x = 180 - 20 \quad x = \frac{160}{150} = 1,066 \dots \text{Meter.}$$

8. Von wie viel Pferdekraften (zu 500 Fusspfd.) ist eine Dampfmaschine, deren Kolben im Cylinder dem Dampfdruck eine Fläche von 720 q'' darbietet, auf 1 q'' aber 15 Pfd. Dampfdruck leidet und in der Minute 48 Auf- und Abgänge von je 4' Weglänge macht?

$$\frac{15 \cdot 720 \cdot 4 \cdot 48}{60 \cdot 500} = 69,12.$$

9. Welche Wirkungsfähigkeit hat ein Eisenbahnzug von 50000 Kilogramm Gewicht 15 Meter Geschwindigkeit?

$$\frac{225 \cdot 50000}{2 \cdot 9,81} = 573394,5 \text{ Kilogramm.}$$

10. Welche lebendige Kraft hat die Erde, deren Gewicht 5 Quatrillionen Kilogramm und deren Geschwindigkeit 30000 Meter beträgt?

$$M C^2 = \frac{5000000000000000000000000000}{9,81} \cdot 900000000 = 450$$

Quintillionen Kilogramm.

11. Welchen Durchmesser muss man einem Hanfseil geben, das eine Last von 1879,563 Kilogramm zu tragen bestimmt ist?

$$\frac{3,1415 x^2}{4} \cdot \frac{615}{3} = 1879,563 \quad x = 3,4 \text{ Centimeter.}$$

12. Wie lang ist die Kante eines Marmorwürfels zu machen, welcher eine Erzmasse von 520000 Kilogramm Gewicht tragen soll?

$$\frac{h^3 \cdot b}{1^2} \cdot \frac{k}{10} = 520000$$

$$h = b = 1$$

$$52 h^2 = 520000$$

$$h = 100 = 1 \text{ Meter.}$$

13. Wie gross ist der Reibungswiderstand des Kolbens einer Dampfmaschine, wenn Kolben und Cylinder von Gusseisen sind,



erster 60'' Umfang 3'' Höhe hat und der Dampfdruck auf jeden Quadratzoll 18 Pfd. beträgt?

$$x = \frac{60 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 15}{100} = 486 \text{ Pfd.}$$

**14.** Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Schleife von 600 Pfund Belastung 400' weit auf dem Strassenpflaster fortzuziehen, wenn unter solchen Umständen der Reibungscoëfficient 0,45 ist?

$$600 \cdot 0,45 \cdot 400 = 108000 \text{ Fusspfd.}$$

**15.** Welche Kraft ist nöthig, um einen eisenbeschlagenen geschmierten Schlitten von 400 Pfd. Gewicht auf einer horizontalen Bahn von Eisenschienen zu ziehen, wenn der erfahrungsmässige Reibungscoëfficient 0,06 des Druckes ist?

$$400 \cdot 0,06 = 24 \text{ Pfd.}$$

**16.** Ein eisernes Rad von 20000 Pfd. Gewicht und 12' Halbmesser liegt in gusseisernen Pfannen auf Zapfen von 4'' Radius. Wie gross ist die zur Ueberwindung der Zapfenreibung nöthige Arbeit am Radumfang, wenn in der Minute 5 Umdrehungen geschehen?

$$20000 \cdot 0,075 = 1500 \text{ Pfd. Zapfenreibung}$$

$$2 \cdot \frac{4}{12} \pi \cdot \frac{5}{60} = 0,1745' \text{ Geschwindigkeit eines Punktes am Zapfenumfang.}$$

$$0,1745 \cdot 1500 = 261,725 \text{ Fusspfd. Sekundenarbeit.}$$

**17.** Wie viel beträgt der durch Zapfenreibung in jeder Sekunde verlorene Nutzeffect an einem Wasserrad, dessen gusseiserne Zapfen 8'' Durchmesser haben, in Bronzefpannen laufen und einen Druck von 25000 Pfd. tragen, wenn das Rad in der Minute 6 Umdrehungen macht?

$$0,07 \cdot 25000 = 1750 \text{ Pfd. Reibung}$$

$$\frac{8 \cdot 3,1415 \cdot 6}{60 \cdot 12} = 0,209' \text{ Geschwindigkeit am Zapfen}$$

$$0,209 \cdot 1750 = 366,33 \dots \text{ Fusspfd. verlornen Nutzeffect.}$$

**18.** Welche lebendige Kraft liegt vor, wenn die wälzende Reibung einer 20000 Kilogr. schweren Locomotive auf einer horizontalen Eisenbahn so bewältigt wird, dass eine Geschwindigkeit von 10 Meter resultirt?

$$\frac{1}{370} \cdot 20000 = 54 \dots \text{ Reibung}$$

$$\frac{20054 \cdot 10^2}{9,81} = 204424 \text{ Kilogrammometer.}$$

**19.** Zwei unelastische Kugeln von beziehungsweise 10 Pfd. Gewicht mit 5' Geschwindigkeit, und 5 Pfd. Gewicht mit 7' Geschwindigkeit bewegen sich einander so entgegen, dass sie central zusammen-



stossen; wie gross ist ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoss?

$$x = \frac{MC - mc}{M + m} = \frac{50 - 35}{15} = 1' \text{ in der Richtung der ersten.}$$

**20.** Eine elastische Kugel mit 9' Geschwindigkeit holt eine andre derselben Masse von 5' Geschwindigkeit ein. Welche Geschwindigkeiten resultiren für beide?

$$MC, = \frac{MC(M - m) + 2Mmc}{M + m}$$

$$C, = \frac{C(M - m) + 2mc}{2m} \quad M = m$$

$$C, = c = 5'$$

$c, = C = 9'$  die Kugeln verwechseln also ihre Geschwindigkeiten, zu welchem Resultat man auch durch folgende Betrachtung gelangt. Für unelastische Kugeln wäre die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoss  $x = \frac{9 + 5}{2} = 7'$ , wonach die erste schnellere 2' verliert, die zweite langsamere 2' gewinnt. Weil aber wegen der Elastizität sowohl Verlust als Gewinn zu verdoppeln sind, so verliert die erste noch 2' und behält blos  $C, = 5'$ , während die zweite  $c, = 7 + 2 = 9'$  annimmt.

**21.** Ein unelastischer Körper von 10 Kilogramm Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 9 Meter. Welche Geschwindigkeit muss ein ihm entgegenbewegter Körper von 35 Kilogr. haben, um ihn durch den Zusammenstoss zur Ruhe zu bringen?

$$9 \cdot 10 = 35 \cdot x$$

$$x = \frac{9 \cdot 10}{35} = 2 \frac{4}{7}$$

**22.** Von zwei Körpern, welche zusammen 200 Kilogr. wiegen, hat der eine die Geschwindigkeit 80<sup>m</sup>, der andre 45<sup>m</sup>. Nach dem Zusammenstoss, welcher nach ihren einander entgegengesetzten Bewegungen erfolgt, haben sie eine gemeinsame Geschwindigkeit von 30<sup>m</sup> in der Richtung des ersten. Wie viel wiegt jeder?

$$x + y = 200 \quad x = 120$$

$$80x + 45y = 200 \cdot 30 \quad y = 80.$$

**23.** Zwei elastische Körper wiegen zusammen 75 Kilogr. und haben die Geschwindigkeiten 70<sup>m</sup> und 30 Meter. Nach dem centralen Zusammenstoss behält der erste eine Geschwindigkeit von 20<sup>m</sup> in seiner ursprünglichen Richtung. Wie gross sind die Gewichte beider und welche Geschwindigkeit kommt dem zweiten nach dem Stoss zu?

$$M + m = 75$$



$$70 - \frac{2m(70 + 30)}{75} = 20 \quad m = 18,75 \text{ Kilogr.}$$

$$M = 75 - 18,75 = 56,25 \text{ Kilogr.}$$

$$c_1 = 30 - \frac{\frac{225}{2}(70 + 30)}{75} = -120^m$$

**24.** Von zwei unelastischen Kugeln zu 5 und 3 Pfd. bewegt sich die eine mit einer Geschwindigkeit von 80' unter einem Winkel von  $18^\circ$  gegen die Berührungsebene beider Kugeln, die andre mit einer Geschwindigkeit von 50' unter einem Winkel von  $35^\circ$  gegen dieselbe Ebene. Welche Geschwindigkeiten und Richtungen besitzen diese Kugeln nach dem Zusammenstoss?

Bei Betrachtung des schiefen Stosses zerlegt man die Geschwindigkeit jeder Kugel in zwei Componenten, deren eine zur Berührungsebene senkrecht, die andre mit ihr parallel ist. Diese haben, wenn die ursprüngliche Geschwindigkeit  $c$  und ihr Winkel gegen die Berührungsebene  $\alpha$  ist, beziehungsweise das Maass  $c \sin \alpha$  und  $c \cos \alpha$ . Offenbar kann nur erstere als direkte Einwirkung des Stosses aufgefasst werden, wonach in unsrem Fall die erste Kugel auf die zweite mit der Kraft  $5 \cdot 80 \cdot \sin 18^\circ$ , die zweite auf die erste mit  $3 \cdot 50 \cdot \sin 35^\circ$  wirkt

$$\begin{array}{rcl} \log 5 + \log 80 + \log \sin 18 - \log r = & \begin{array}{r} 0,6989700 \\ 1,9030900 \\ 9,4899824 \\ \hline 12,0920424 \\ 10 \\ \hline 2,0920424 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0,6989700 \\ 1,9030900 \\ 9,4899824 \\ \hline 12,0920424 \\ 10 \\ \hline 2,0920424 \end{array}} \right\} MC = 123,605 \\ \\ \log 3 + \log 50 + \log \sin 35 - \log r = & \begin{array}{r} 0,4771213 \\ 1,6989700 \\ 9,7585913 \\ \hline 11,9346826 \\ 10 \\ \hline 1,9346826 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0,4771213 \\ 1,6989700 \\ 9,7585913 \\ \hline 11,9346826 \\ 10 \\ \hline 1,9346826 \end{array}} \right\} mc = 86,036 \end{array}$$

$$x = \frac{MC - mc}{M + m} = \frac{123,605 - 86,036}{8} = 4,695'$$

Mit der Geschwindigkeit 4,695' combinirt sich für die erste Kugel  $80 \cdot \cos : 18^\circ = 76,084$  rechtwinklig, woraus die Resultante beider  $K = \sqrt{K^2 + k^2} = \sqrt{5788,775056 + 22,113025} = 76,229'$  folgt und zwar unter einem Winkel gegen die Tangentialebene von  $3^\circ 31' 55''$ , indem  $\log \sin z = \log r + \log 4,695 - \log 76,229$







$$\begin{aligned} \text{effekte von a bis m} &= \frac{1}{2} a m (a b + m r) = \frac{1}{2} x [K \cdot a c + K (a c - x)] \\ &= \frac{K x}{2} (2 a c - x) \end{aligned}$$

Die Summe der Krafteffekte ist aber nichts anderes, als die am Ende derselben erlangte Wirkungsfähigkeit des ihnen ausgesetzt gewesenen Körpers, also

$$\frac{p c^2}{2 g} = \frac{K x}{2} (2 a c - x)$$

$$c^2 = \frac{K g x}{p} (2 a c - x)$$

$$2 a c - x = a h - a m = m h$$

$$x = a m$$

$$x (2 a c - x) = m h \cdot a m = m r^2$$

$$c^2 = \frac{K g}{p} m r^2 \quad c = m r \sqrt{\frac{K g}{p}} \quad c = \sin . \text{arc. } a r \sqrt{\frac{K g}{p}}$$

Diese Geschwindigkeit ändert sich zwar in jedem Moment, aber für den kleinen in der unendlich kurzen Zeit  $t$  durchlaufenen Weg  $m n$  kann sie für konstant gelten. Dann ist  $c \cdot t = m n$   $t = \frac{m n}{c}$

$$\begin{aligned} &= \frac{m n}{m r} \sqrt{\frac{p}{K g}}. \text{ Wegen } \triangle r m c \sim \triangle r p s \text{ ist } \frac{r s}{m r} = \frac{m n}{m r} = \\ &\frac{r p}{r c} \text{ folglich } t = \frac{r p}{a c} \sqrt{\frac{p}{K g}}. \end{aligned}$$

Die Zeit für die Bewegungsstrecke  $m n$  ist also dem ihr entsprechenden Bogen  $r p$  proportional, und nach Summierung der unendlich kleinen Bogenstücke für den Weg  $a m$  dem Bogen  $a r$ , sowie für  $a c$  der Viertelperipherie  $\frac{\pi}{2}$ , mithin für eine den Weg  $a c h$  hin

und her zurücklegende Bewegung, welche eine ganze Schwingung genannt wird,  $= 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{p}{K g}}$ . — Die Geschwindigkeit im Punkt

$c$ , welche als Vibrationsintensität bezeichnet wird, ist nach

Obigem dem  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  proportional oder  $= a c \sqrt{\frac{K g}{p}}$ . — Die

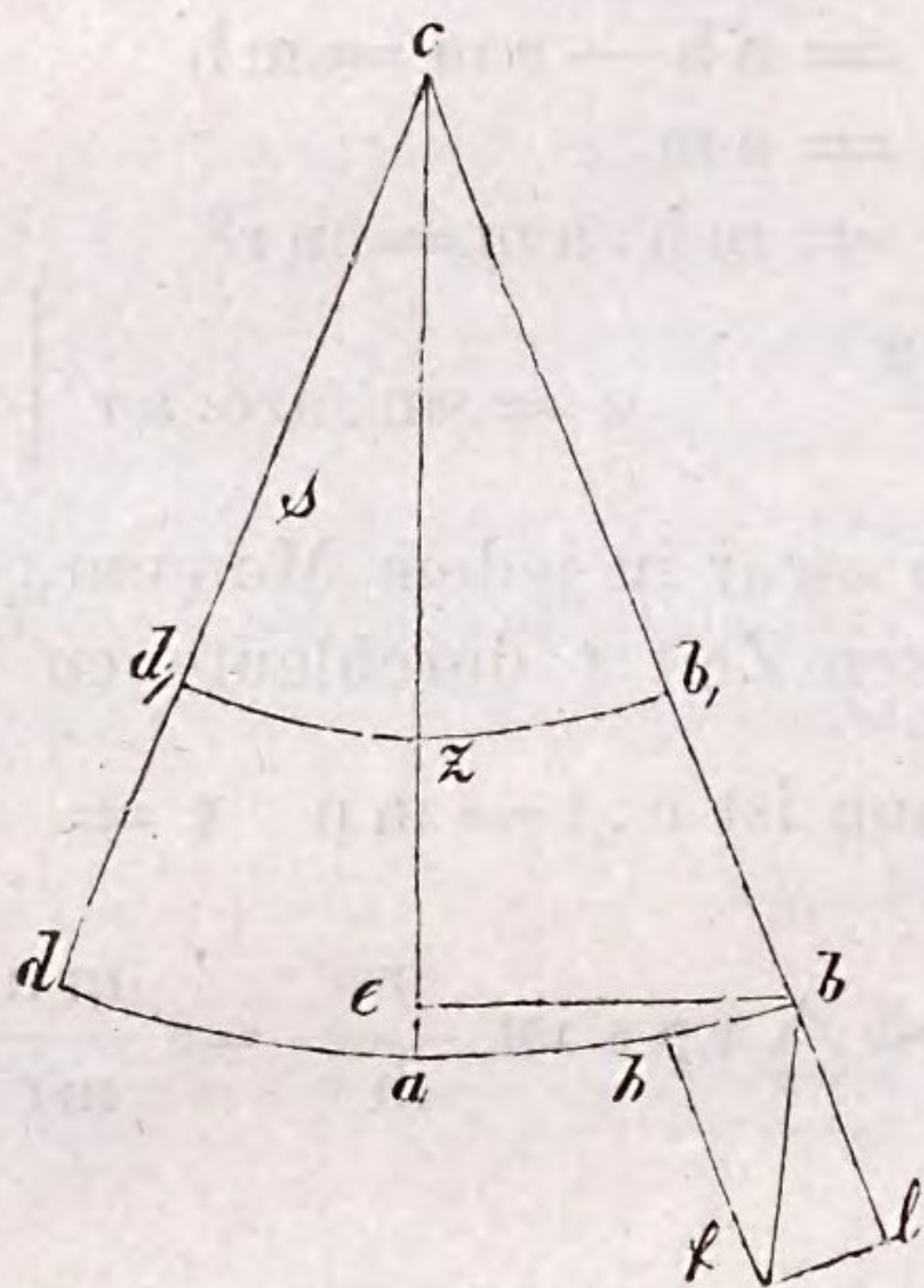
grösste Entfernung des schwingenden Körpers von  $c$  heisst Schwingungsweite (amplitude), die Entfernung einer beliebigen Wegstelle von  $c$  die Elongation, und der an diesem Punkt herrschende Bewegungszustand die Phase. — Trigonometrisch leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit in  $c$  ihr Maximum hat, in  $a$  und  $h$  aber



Null ist, von a bis c wächst, von c bis h abnimmt, von h ab ihr Zeichen, die Bewegung also ihre Richtung ändert, aber die vorher durchgemachten absoluten Werthe wiederholt.

2. Ein schwerer Punkt, welcher an einer einerseits befestigten gewichtlosen Linie hängt, heisst ein Pendel. Dasselbe ruht im Gleichgewicht, wenn die Aufhängungslinie eine Verlängerung des Erdradius ist. — Wird der schwere Punkt a dadurch aus dem Gleichgewicht gebracht, dass man ihn bis b aufhebt, so bewirkt die Erdanziehung eine Bewegung desselben, welche beschleunigt von b

Fig. 31.



nach a geht, in a ihr Maximum erreicht, von a nach d vermöge der Beharrlichkeit in umgekehrter Ordnung abnehmend verläuft, wobei  $\text{arc. } ad = ab$ , in d Null wird, und dann in verkehrter Folge nach b zurückkehrt. Diese Bewegung von b über a nach d und von d über a zurück nach b heisst eine ganze Pendelschwingung, bei der Elongation derselben, ac die Pendellänge. — Innerhalb sehr kleiner Schwingungsbogen ist die Dauer der Oscillationen von ihrer Amplitude ganz unabhängig und sie sind isochron. Die beschleunigende Kraft ist nämlich nach Obigem dem Sinus des Schwingungs-

bogens proportional, beträgt also für einen Winkel  $\alpha$   $g \sin \alpha$  und für

$\wedge \frac{1}{2} \alpha$   $g \sin \frac{1}{2} \alpha$ . Bei sehr kleinen Bogen ist aber nahezu

$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha$ , wonach ein doppelter Weg auch mit verdoppelter

beschleunigender Kraft, also in derselben Zeit zurückgelegt wird, als der einfache. Qualität und Gewicht des schwingenden schweren Punktes ist ebenfalls — abgesehen von zufälligen Hindernissen, namentlich dem Luftwiderstand — auf die Oscillationsdauer ohne Einfluss, weil die Beziehung der Schwere zu allen Körpern der Erde dieselbe ist. — Drückt bf die den Punkt b senkrecht zur Erde ziehende Schwere aus, so kann diese Kraft in die beiden Seitenkräfte bh und bl zerlegt werden, von denen bl durch die Unzerreissbarkeit der Aufhängungslinie im Gleichgewicht gehalten und aufgehoben wird, bh aber als wirksame Triebkraft des Pendel besteht. Wegen  $\triangle bhf \sim \triangle bce$  steht  $bh : bf = be : bc$   $K : P = E : L$



$K = \frac{P \cdot E}{L}$  d. h., die Pendelschwingkraft ist der Schwere und der Entfernung von der Gleichgewichtslage direkt, der Pendellänge aber umgekehrt proportional, mithin während jeder Schwingung desselben Pendels an demselben Punkt der Erdoberfläche wegen des Faktors E in einer Weise variabel, welche, wie in erster Nummer dieses Abschnittes, in ihrer resultirenden Geschwindigkeit durch den Sinus des einem bestimmten Punkt entsprechenden Schwingungsbogens bestimmt wird. Demnach ist  $K \cdot ac = \frac{EP}{L}$

und, weil ac (im Sinne der Fig. 30) die Entfernung des äussersten Angriffpunktes der Kraft vom Gleichgewichtspunkt hier die Elongation ist,  $K = \frac{P}{L}$  folglich  $c = \sin. \text{arc. } ab \sqrt{\frac{g}{L}}$  und  $t = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ .

Indem an demselben Punkt der Erdoberfläche für ein andres Pendel von der Länge  $L'$ , die analoge Formel steht  $t' = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}}$ , so ergibt sich die Proportion  $t:t' = \sqrt{L} : \sqrt{L'}$ , d. h., die Schwingungszeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Pendellängen. — Nennt man die Menge der in einer bestimmten Zeiteinheit gemachten Pendelbewegungen Schwingungszahl, so leuchtet ein, dass diese um so grösser ist, je kleiner die Dauer einer einzelnen Schwingung ist, dass also Schwingungszahlen und Schwingungszeiten in umgekehrtem Verhältniss stehen, mithin auch erstere sich verkehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln der Pendellängen  $n:n' = \sqrt{L'} : \sqrt{L}$ .

— Für dasselbe Pendel an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche mit abweichender Attraktionsintensität hätte man

$$\begin{aligned} t:t' &= \sqrt{\frac{1}{g}} : \sqrt{\frac{1}{g'}} = \sqrt{g'} : \sqrt{g} \left\{ \begin{array}{l} n:n' = \sqrt{g'} : \sqrt{g} \\ n'^2:n^2 = g':g \end{array} \right. \text{ d. h.,} \\ t:t' &= n:n' \end{aligned}$$

die Anziehungskräfte stehen in geradem Verhältniss zu den Quadraten der Schwingungszahlen — ein Satz, welcher nicht nur für das Verhältniss der Schwere zum Pendel, sondern für alle Fälle Bedeutung hat, in denen eine Kraft sich in Erregung von schwingenden Bewegungen äussert.

**3.** Ein Pendel, welches den Bogen bad, eine halbe Schwingung, in der Zeit  $t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 1$  Sekunde macht, heisst Sekunden-

pendel, dessen Länge für Paris  $L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9,81}{9,869} = 0,9937$  Meter,



allgemein aber für einen Punkt der Erdoberfläche von der geographischen Breite  $\varphi$  aus der Formel  $l = 0,99102557 + 0,00507188 \sin^2 \varphi$  gefunden wird. Wird umgekehrt die Länge des Sekundenpendel durch Beobachtung konstatirt, so ergibt sich durch Rechnung das Maass der Beschleunigung  $g = L\pi^2 = 9,81 \dots$

4. Von dem bis jetzt betrachteten mathematischen Pendel unterscheidet sich das physische merklich. Vorerst ist nicht alles Gewicht im Schwingungspunkt vereinigt, sondern die Aufhängungslinie ist selber ein schwerer Körper und man kann jeden ihrer Punkte als den Schwingungspunkt eines kürzeren Pendel ansehen, welches ebendesshalb rascher zu schwingen sucht, also die Gesamtpendelbewegung beschleunigt. Für dieselbe Schwingungsdauer ist daher das physische Pendel länger zu machen, als das berechnete mathematische. Ferner findet am Aufhängungspunkt Reibung statt, und das bewegte Pendel muss die Luft durchschneiden, zwei Widerstandsquellen, aus denen Verzögerung der Pendelbewegung hervorgeht. Endlich ist das Material des Pendels den Einflüssen der Witterung, namentlich der Ausdehnung und Zusammenziehung in Wärme und Kälte, sowie der atmosphärischen Feuchtigkeit unterworfen.

5. Um dem physischen Pendel in der allgemeinen Theorie gerecht zu werden, hat man eine Betrachtung über die Trägheitsmomente anzustellen. — Wenn in Fig. 31 die Linie  $cb$  sich um  $c$  drehen soll, so kann die dies bewirkende Druckkraft an sehr verschiedenen Punkten von  $cb$  angebracht sein, wird aber, wenn der Endpunkt  $b$  immer denselben Bogen  $b$ , also etwa nur einen halb so grossen Weg als  $b$ , beschreiben soll (wenn  $cb = 2cb$ ), eine Grösse haben müssen, zu deren Beurtheilung man berücksichtigt, dass den Hebelgesetzen gemäss eine Kraft von der Intensität 1 und der Entfernung 1 mit der doppelten Intensität begabt werden muss, wenn sie in der halben Entfernung vom Drehpunkt das Nämliche leisten soll, was die in der ganzen Entfernung angreifende Einheitskraft hervorbringt. Nun soll durch diese Doppelkraft eine Masse in  $b$ , so bewegt werden, dass sie in der Zeit den halben Weg  $b, d$ , zurücklegt, in welcher eine in  $a$  befestigte Masse unter dem Einfluss der Einheitskraft den ganzen Bogen  $b, d$  durchläuft. Hierzu ist nöthig, dass die in  $b$ , angebrachte Masse viermal so gross sei, als die in  $a$ , denn bei dieser Annahme ertheilt die Kraft 1 der Masse 1 die Geschwindigkeit 1, die Kraft 2 aber der Masse 4 die Geschwindigkeit  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

Eine ähnliche Betrachtung lehrt uns, dass in einer  $\frac{1}{3} bc$  betragenden Entfernung vom Drehpunkt eine 9 mal so grosse Masse als in  $b$



gedacht werden muss, um den analogen Verlauf der Erscheinungen zu sichern, und in einer Entfernung  $\frac{1}{n}$   $bc$  eine  $n^2$ mal so grosse, überhaupt dass Massen, welche in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse bezüglich der Winkelgeschwindigkeit sich ersetzen sollen, den Quadraten der Abstände verkehrt proportional sein müssen. Dies fliesst auch daraus, dass unter den vorausgesetzten Umständen die Masse in  $b$  die lebendige Kraft  $m \cdot b d^2$  diejenige in  $b$ , die lebendige Kraft  $m, b, d,^2$  besitzt, woraus  $m : m, = b, d,^2 : b d^2$

$$\text{arc. } b, d, : b d = c b, : c b$$

$$b, d,^2 : b d^2 = r,^2 : r^2$$

$$m : m, = r,^2 : r^2 \quad m r^2 = m, r,^2$$

d. h., die Produkte aus den Massen und den Quadraten ihrer Abstände vom Drehpunkt, welche man die Trägheitsmomente dieser Massen heisst, müssen einander gleich sein, wenn die Massen von gleichem Einfluss auf die eintretende Kreisbewegung, mithin äquivalent sein sollen.

6. Für Systeme materieller Punkte von unveränderlicher Verbindung läuft die Bestimmung des Trägheitsmomentes darauf hinaus, die Masse anzugeben, welche in einer gewissen Entfernung vom Drehpunkt den zerstreuten materiellen Punkten äquivalent ist. Weil das Produkt dieser idealen Masse in das Quadrat ihrer Entfernung vom Drehpunkt  $M \cdot E^2$  gleich sein muss der Summe der Produkte der einzelnen materiellen Punkte in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Drehpunkt  $= m e^2 + m, e,^2 + m,, e,,^2 + \dots$ , so kommt Alles auf Summirung einer Reihe zurück, was für Körper von einfacher geometrischer Gestalt und homogener Beschaffenheit nicht schwer, sonst aber nur mit unendlicher Annäherung zu lösen ist.

7. Sind auf dem Aeusseren zweier concentrischer Räder, deren Durchmesser sich etwa verhalten wie 1 : 2, zwei Massen so angebracht, dass sie sich das Gleichgewicht halten, so reicht eine geringe in der Richtung der Tangente wirkende Kraft  $k$  hin, das ganze System in Drehung zu versetzen. Das nämliche Resultat nach Grösse und

Richtung wird erzielt, wenn die Kraft  $k, = \frac{1}{4} k$  an der Peripherie

des grossen Rades angreift, die Massen aber am Innern sitzen, oder wenn die Einheitskraft  $k$  am Umfang der äusseren Scheibe angreift, die an der innern befindlichen Massen jedoch vierfach so gross sind, als vorher angenommen ward. Dagegen wird die Umdrehungsgeschwindigkeit doppelt so gross, wenn Massen und Kraft an dem Rande des inneren Rades handeln. Man erkennt leicht, dass diese Fälle nur



zur verdeutlichenden Bestätigung des Gesetzes dienen, dass, wenn bei unveränderter Stärke und konstantem Angriffspunkt einer beschleunigenden Kraft träge Massen um eine feste Achse gedreht werden sollen, die Massen sich verkehrt verhalten müssen, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Drehpunkt.

8. Der hier eingeführte Begriff der Trägheit steht zur Schwere insofern in äusserlicher Beziehung, als wir gern die Quantität der im Volumen eines Körpers enthaltenen materiellen Punkte nach der Widerstandsgrosse beurtheilen, welcher einer bewegenden Kraft entgegengestellt wird. Dieser Widerstand, sofern man ihn Trägheit heissen will, scheint in der Materie an sich, unabhängig von ihren positiven Hindernisse der Bewegung setzenden Beziehungen zu äusseren Kräften begründet, ist nichts anderes, als die Neigung der Materie, ihre Stelle im Raum zu behaupten, und könnte als ein passiver bezeichnet werden.

9. Zerlegt man das um den Drehpunkt  $c$  schwingende physische Pendel seiner Länge nach in  $n$  unendlich kleine Stücke von der Ausdehnung  $\frac{L}{n}$  und dem Gewicht  $\frac{P}{n}$ , wenn  $P$  das Gewicht der ganzen Pendelstange bedeutet, so sind die Trägheitsmomente des von  $c$  ab ersten, zweiten, dritten, ...  $n^{\text{ten}}$  Stückes beziehungsweise  $\frac{P}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2}$   $\frac{P}{n} \cdot \frac{4l^2}{n^2}$   $\frac{P}{n} \cdot \frac{9l^2}{n^2}$  ...  $\frac{P}{n} \cdot \frac{n^2 l^2}{n^2}$  folglich deren Summe, welche das Trägheitsmoment der ganzen Stange gibt,  $= \frac{P}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ . Die Summe einer Reihe von der Form der in Klammern stehenden ist  $\frac{n \cdot n + 1 \cdot 2n + 1}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ , worin, wenn  $n = \infty$ , das erste Glied  $2n^3$  die folgenden so sehr überwiegt, dass diese dagegen verschwinden, worauf bleibt  $\frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$ , also das Trägheitsmoment des Ganzen  $= \frac{P}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{P \cdot l^2}{3}$  d. h., die in  $a$  vereinigt gedachte Masse, welche dem Ganzen äquivalent wäre, beträgt den dritten Theil der Masse der Pendelstange. — Sollte man im Schwerpunkts des Pendels eine Masse anbringen, welche der in  $a$  gedachten Masse äquivalent wäre, so stünde

$$x \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{P}{3} l^2$$

$$x = \frac{4}{3} P.$$



Weil unter Einfluss der Schwere  $P$  die in den Schwerpunkt verlegte Masse  $\frac{4}{3} P$  in Bewegung gesetzt und erhalten wird, so ist für diese die Intensität der beschleunigenden Kraft, deren Einheit mit  $g$  bezeichnet wird, nur  $\frac{3}{4} g$ , indem sie offenbar in verkehrtem Verhältniss zu der von ihr zu bewältigenden Masse steht. Weil ferner diese Masse in der Entfernung  $\frac{1}{2} L$  vom Drehpunkt gedacht wird, so stehen für Schwingungsschnelligkeit und Schwingungsdauer die Formeln

$$c = \sin. \text{arc. } a b \sqrt{\frac{\frac{3}{4} g}{\frac{1}{2} L}} = \sin. \text{arc. } a b \sqrt{\frac{3 g}{2} : L}$$

$$t = 2 \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2} L}{\frac{3}{4} g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}} \text{ d. h., eine gleichförmige}$$

Pendelstange schwingt wie ein mathematisches Pendel, dessen Länge  $\frac{2}{3}$  der gegebenen Länge des physischen

Pendels misst. Ist  $cz = \frac{2}{3} ac$ , so heisst der Punkt  $z$ , in welchem die ganze Wirkungsfähigkeit des physischen Pendels vereinigt angenommen wird, dessen Schwingungsmittelpunkt.

**10.** Ein Pendel, an welchem man zwei so gelegene Unterstützungspunkte kennt, dass das Pendel bei der Drehung um den einen wie um den andern gleichviel Schwingungen macht, heisst *Reversionspendel*, hat die Eigenschaft, dass die Entfernung beider Drehpunkte von einander der Länge des gleich schnell schwingenden mathematischen Pendels gleicht, und ist sehr geeignet zur experimentellen Auffindung der Länge des Sekundenpendels.

**11.** Die in zweiter Linie genannten Widerstände der Reibung und der Luft können durch geschickte Einrichtung der Drehachse und geeignete Aufstellung des Apparates sehr geschwächt, oder doch auf eine so konstante Grösse gebracht werden, dass dieselbe bei jeder Untersuchung in Rechnung gezogen und hierdurch der Beobachtungsfehler unschädlich gemacht werden kann. Den Einflüssen der atmosphärischen Feuchtigkeit begegnet man bei hölzernen Pendelstangen durch Auskochen in Oel und Firnissen oder Vergolden. Metalle leiden weniger davon, desto mehr von der die Schwingungsmittelpunkte verlegenden Ausdehnung in der Wärme. Sie zu



kompensiren, hat man vorgeschlagen, statt der am untren Ende befestigten Linse ein Quecksilbergefass anzubringen, dessen Inhalt nahe ebensoviel nach Oben, als die Stange nach Unten sich ausdehnen würde. — Martin befestigt nahe der Linse rechtwinklig zur Pendelstange ein aus zwei parallelen gleichlangen fest vernieteten Streifen von Eisen und Messing bestehendes Stäbchen, dessen Enden kleine Gewichte tragen. In der Wärme dehnt sich das den untren Streifen bildende Messing stärker aus, bildet daher, indem es von dem schwächer expandirten Eisenstreifen an der geradlinigen Streckung gehindert wird, einen nach Unten konvexen Bogen und hebt so die gedachten Gewichte, was den Schwerpunkt nach Aufwärts verschiebt, somit die senkende Einwirkung der Stangenausdehnung corrigirt. — Am vorzüglichsten erscheint das aus parallelen, durch Querschienen abwechselnd verbundenen Zink- und Stahlstäben gefertigte Rostpendel, dessen kompensirende Wirkung sich darauf gründet, dass Zink in der Wärme sich fast dreimal so stark ausdehnt, als Stahl.

**12.** Die Anwendungen des Pendels sind für die Wissenschaft so folgenreich, dass es gleichermaassen als der einfachste, wie der wichtigste Apparat der Naturforschung erklärt werden darf. Durch das Pendel wurde ein genaues Zeitmaass ermöglicht, indem es den Gang der Uhren regulirt. Die beschleunigende Kraft, welche in den Uhren die Bewegung des Werkes hervorbringt und erhält — ein fallendes Gewicht oder eine gespannte Stahlfeder — würde ihrer Natur nach eine ungleichförmige Geschwindigkeit setzen, während eine Eintheilung in gleiche Zeitabschnitte offenbar als erste Bedingung eine gleichförmige Bewegung der den Zeitfortschritt symbolisirenden Zeiger fordert. Zu dieser Correctur ist concentrisch mit der Achse, um welche das Gewicht läuft, ein Zahnrad befestigt, in dessen Zähne abwechselnd von der einen und andern Seite ein vom schwingenden Pendel geführter Anker eingreift. Hierdurch wird auf jede Pendelschwingung eine Drehung des Rades um einen Zahn gestattet, und weil erstere in regelmässigen Zeiten erfolgen, ist auch der sichere Gang des Rades garantirt.

Der in der Musik verwendete Taktmesser — Metronom — ist ein Pendel, welches sich nicht um den Endpunkt, sondern einen innerhalb des Stabes gelegenen Punkt dreht, wobei der fallende Theil den andern heben muss. Die hierdurch veranlasste Verzögerung der Schwingungen kann mittels Verschiebung eines Gewichts an der Stange beliebig regulirt werden, und ist um so beträchtlicher, je näher der Unterstützungspunkt dem Schwerpunkt des Pendel liegt.

Von nicht geringem Interesse ist die bereits oben dargestellte Bestimmung des Fallraums der ersten Sekunde und des Maasses der Beschleunigung mittels des Sekundenpendels.



Hier ist auch der für die physische Erdbeschreibung zur Erledigung der bedeutsamsten Fragen unentbehrlichen Untersuchungen über die Attraktionsintensitäten verschiedener Punkte der Erdoberfläche zu gedenken. Die von Huyghens behauptete, von Newton bestrittene Ansicht, dass die Schwingungszeit des nämlichen Pendels an allen Punkten der Erdoberfläche gleich sei, wurde 1672 von Richer durch die Erfahrung zum Austrag gebracht. Eine Pendeluhr, welche er von Paris nach dem 5<sup>0</sup> nördlich vom Aequator liegenden Cayenne brachte, ging hier täglich um 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Minuten nach und musste desshalb das — wie durch Umkehrung des Experimentes nach Zurückbringung der Uhr nach Paris gegenerprobt wurde — zu langsam schwingende Pendel um 1,25''' verkürzt werden. — Die erweiterten Beobachtungen von Sabine ergaben, dass ein Pendel, dessen Länge in Paris als Sekundenpendel regulirt wurde, in Trinidad täglich um 122, in Jamaika um 104, in Newyork um 30 Schwingungen zurückblieb, dagegen in London um 11, in Drontheim um 50, in Grönland um 82, in Spitzbergen um 94 Schwingungen voraneilte, desshalb an den genannten Orten für dieselben Schwingungszahlen das Sekundenpendel beziehungsweise 39,019'', 39,035'', 39,101'', 39,139'', 39,174'', 39,203'', 39,215'' pariser Maass lang gemacht werden muss. — Weil die Ursache der Pendelbewegung in der Erdanziehung beruht, so fliesst aus jenen Thatsachen, dass diese nicht überall gleich sei, sondern gegen den Aequator ab, mit der wachsenden geographischen Breite aber zunehme. Der Verlust an Schwere in der Nähe des Aequator kommt theils auf Rechnung der in der Erdrotation erzeugten, der Schwere entgegenwirkenden, am Aequator, dessen Punkte den grössten Kreis um die Erdachse beschreiben müssen, besonders hervortretenden Schwungkraft, theils und zwar hauptsächlich auf Rechnung des Umstandes, dass ein Punkt des Aequator vom Erdcentrum weiter entfernt ist, als ein dem Pole näherer Punkt, der Pol selbst aber ihm am nächsten steht. Hiermit war auf neuem Weg die schon aus direkten Gradmessungen abgeleitete Abplattung der Erde an den Polen bewiesen. — Verfeinerte Betrachtungen lehren übrigens, dass sonst noch kleine Abweichungen der Pendelschwingungen statthaben, welche der verschiedenen Dichte des Erdinnern an den fraglichen Punkten zuzuschreiben sind. Bouguer machte zuerst aufmerksam auf die Ablenkung eines längs der Abhänge des mächtigen Chimborasso herabhängenden Bleilotes um 7''—8'' von der Verticalen gegen den Berg, Maskelyne fand 1772 am Fuss des Shehallien in Schottland eine Ablenkung von 54'' und berechnete daraus die mittlere Erddichte zu 4,56, was von den 1824 durch Carlini am Mont Cenis angestellten Beobachtungen nicht



widersprochen wurde. Einen andern Weg zu demselben Ziel schlug Michell in London ein, von welchem durch Wollaston's Vermittelung Apparat und Idee der Untersuchung an Cavendish kam. Das Verfahren geht zunächst von der Erfahrung aus, dass ein leicht beweglicher Hebel, gleichsam ein horizontales Pendel, durch Anziehung von Seite einer irgend beträchtlichen Masse auf seine Endpunkte eine Drehung erfahre, so dass die in den Attraktionserscheinungen des Erdkörpers grossartig zu Tag tretenden Kräfte hier zu schwachen, aber wesentlich gleichen Erweisungen kämen. An den Enden eines horizontalen, gleicharmigen, an einem feinen Silberfaden hängenden Hebels sind zwei kleine Kugeln befestigt. Unabhängig von diesem System, jedoch um dieselbe Verticalachse drehbar, hängen rechts und links vom Hebel in gleicher Höhe zwei Metallkugeln, deren jede beim ursprünglichen Versuch 157,925 Kilogr. wog. Bildet ihre Verbindungslinie mit dem Hebel einen rechten Winkel, so ist Alles im Gleichgewicht. Geschah jedoch eine Bewegung um die gemeinsame Drehachse in der Art, dass die linke Kugel dem vordren Hebelende von der einen Seite, die rechte Kugel dem hintren Hebelende von der andren Seite sehr nah steht, so ist die Massenanziehung der Kugeln stark genug, um eine freiwillige Bewegung der beziehungsweise Hebelenden gegen die nächststehenden Kugeln zu bewirken. Weil hierbei der Aufhängdraht des Hebels eine Drehung erleidet, erfolgen Horizontalschwingungen des letzteren, von denen man weiss, dass sie unter dem Einfluss einer Masse von 157,925 Kilogr. an einem Pendel von gegebener Länge in bekannter Entfernung hervorgebracht werden und aus deren Vergleichung mit den Schwingungen eines gewöhnlichen Pendels ein Schluss auf die allgemeine Anziehungskraft und hiermit auf die Dichte der Erde gezogen werden kann. Diese ergab sich zu 5,48 und nach Reich's Versuchen zu 5,58.

Ein in Bewegung versetzter Körper verlässt die durch drei Punkte seiner Bahn bestimmte Ebene, welche für das hier in Betracht kommende Pendel Schwingungsebene heisst, nur, wenn äussere Kräfte ihn daraus verdrängen — sonst bleibt sie unverändert beibehalten. Diesem Grundsatz entgegen bemerkte man 1661 in Florenz eine schon nach wenigen Stunden auffällige Abweichung der Schwingungsebene des Pendels von Ost nach West. Fast 200 Jahre später, 1852, erkannte Foucault in Paris hierin einen Beweis für die Axendrehung der Erde. Ein Pendel, welches genau über dem Nordpol der Erde befestigt wäre, nimmt wegen des erwähnten Princip der Erhaltung der Schwingungsebene an der Erdrotation von West nach Ost keinen Antheil, scheint daher für einen Beobachter, welcher von ihr, als nicht unmittelbar merklich, absieht, wenn anfänglich von Nord nach Süd, nach sechs Stunden Ost nach West, nach weiteren sechs Stunden von Süd nach Nord,



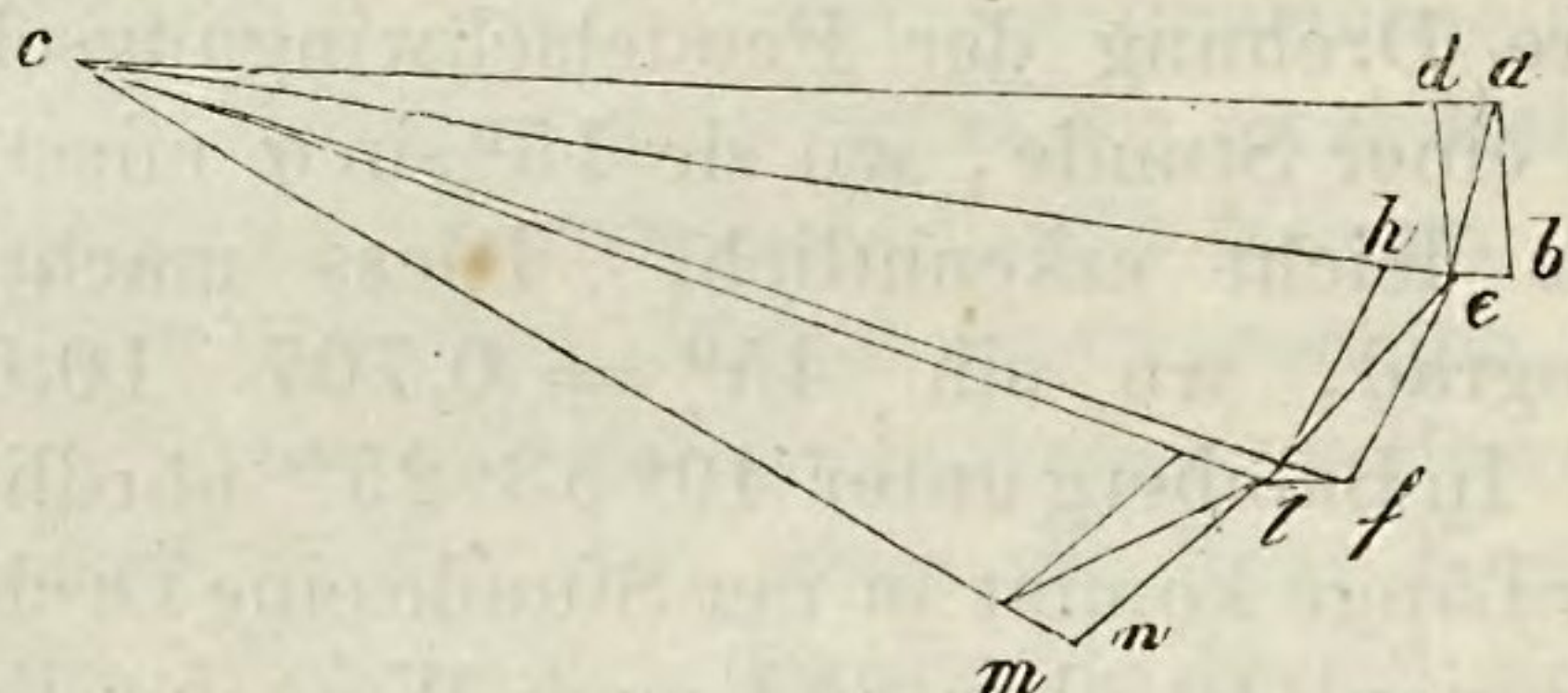
nach folgenden sechs Stunden von West nach Ost und nach den letzten sechs Stunden wieder von Nord nach Süd zu schwingen, also in einem Tag eine der Erdbewegung entgegengesetzte, der Sonne gleichlaufende Drehung von Ost über Süd nach West u. s. f. gemacht zu haben. — Fällt hier die von der Gleichgewichtslage des Pendel angedeutete Senkrechte zur Erdoberfläche in die Verlängerung der Erdachse und beträgt desshalb die tägliche Drehung — hiermit auch die scheinbare umgekehrte der Pendelschwingungsebene — einen vollen Kreisumfang, so beträgt die Drehung der Verticalen eines zwischen Pol und Aequator gelegenen Punktes  $360^0$  mal dem Sinus der geographischen Breite des Orts und ebenso gross in verkehrter Richtung ist die scheinbare Drehung der Pendelschwingungsebene und wird demnach schon in einer Stunde, wo sie  $15^0 \sin \varphi$  misst, in höheren Breiten wenigstens leicht erkenntlich. Diess macht für einen Platz im 45. Breitengrad, wo  $\sin 45^0 = 0,70710605^0$  oder täglich  $254^0 31' 12''$ . In Bamberg unter  $49^0 53' 25''$  nördlicher Breite  $28^0 33' 16''$  östlicher Länge kommt in der Stunde eine Drehung der Pendelschwingungsebene von Ost über Süd nach West zur Beobachtung von der Grösse  $15 \sin 49^0 53' 25'' = 15 \cdot 0,7648122 = 11,472183^0$ , was auf den Tag  $275^0 19' 56,6112''$  macht. In Cayenne, welches nur  $4^0 56'$  vom Aequator entfernt ist, sinkt die stündliche Drehung auf  $1,31^0$ , die tägliche auf  $31^0 26' 24''$ . Im Aequator, wo die geographische Breite und mit ihr der Sinus Null ist, verschwindet die Drehung ganz und auf der südlichen Hemisphäre muss die scheinbare Drehung, wie der Zeichenwechsel von  $\sin \varphi$  andeutet und die Erfahrung bestätigt, von Ost über Nord nach West laufen. — Foucault experimentirte zuerst mit einem gegen 7' langen, 10 Pfd. schweren Pendel, dann mit einem gegen 40' langen im Meridiansaal der pariser Sternwarte, endlich mit einem Pendel über 130' lang, 56 Pfd. schwer im Pantheon zu Paris. Das Pendel, welches in schiefer Lage von einem Faden gehalten wird, den man zur Eröffnung der Bewegung abbrennt, schwingt über einem getheilten Kreisring und verzeichnet mit einer an der Kugel nach Abwärts gerichteten Spitze in dem längs dem Ring aufgehäuften kleinen Sandwall unverkennbare Spuren der Drehung seiner Schwingungsebene.

**13.** Die gleichzeitige Einwirkung einer momentanen und einer kontinuierlichen Kraft auf einen materiellen Punkt setzt eine Centralbewegung, vermöge deren ein krummliniger Weg beschrieben wird, dessen Ebene durch die Richtung der ursprünglich die Bewegung bewirkenden momentanen und durch den Sitz der die beständige Ablenkung von dieser Richtung veranlassenden kontinuierlichen Centralkraft bestimmt ist. Die Kurve ist offen, wie Parabel und Hyperbel, geschlossen, wie Kreis und Elipse, sie wird gegen den Mittelpunkt konkav, wenn die Centralkraft eine



anziehende, konvex, wenn sie eine abstossende ist. Die Kurve erwächst auf dem Wege der Konstruktion, sofern man die ganze Bewegung in unendlich kleine Zeittheilchen zerlegt, innerhalb deren einem die Bahn als geradlinig und der Einfluss der Centrakraft als konstant betrachtet werden darf, während sofort die Summe dieser unendlich vielen und kleinen Geraden die Kurve darstellt. Ein Körper, welcher vermöge der ihm von einer momentanen Kraft ertheilten Bewegung in der Zeiteinheit den Weg  $ab$  beschriebe, von einer in  $c$  sitzenden kontinuierlichen Centrakraft aber in derselben Zeit durch  $ad$  ge-

Fig. 32.



zogen wird, macht, wie wir durch Konstruktion des Kräfteparallelogramms finden, in derselben Zeit den Weg  $ae$ . In der nächsten Zeiteinheit durchliefe er vermöge der Beharrlichkeit  $ef = ae$ , gelangt aber wegen der gleichbleiben-

den, von  $c$  ausgehenden, in diesem Moment durch  $eh = ad$  ausgedrückten Anziehung nach  $l$  und aus demselben Grund im dritten Moment nach  $m$ . Es ist leicht zu sehen, dass die gebrochene Linie  $aelm$ , wenn ihre einzelnen Theile unendlich klein sind, eine Kurve darstellt. Es leuchtet ferner ein, dass  $el > ef$   $lm > ln$  die Bewegung also eine ungleichförmige ist und zwar, da  $cm < cl < ce$   $< ca$  um so schneller wird, je kleiner die Entfernungen des bewegten Körpers vom Centralpunkt sind. Dass diese letzteren überhaupt wechseln, deutet uns an, dass die Bewegungsbahn kein Kreis ist. Das

verkehrte Verhältniss zwischen Geschwindigkeiten und Centrumsabständen ist jedoch nicht in einfachen Zahlen ausdrückbar, sondern die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Centrumsentfernungen. Dieser Satz, welcher in der Astronomie als erstes Kepler'sches Gesetz berühmt ist, lässt sich, weil

$$\left. \begin{array}{l} \triangle cae = cef \\ \triangle cef = cel \end{array} \right\} \triangle cae = cel = clm \dots \text{auch so aus-}$$

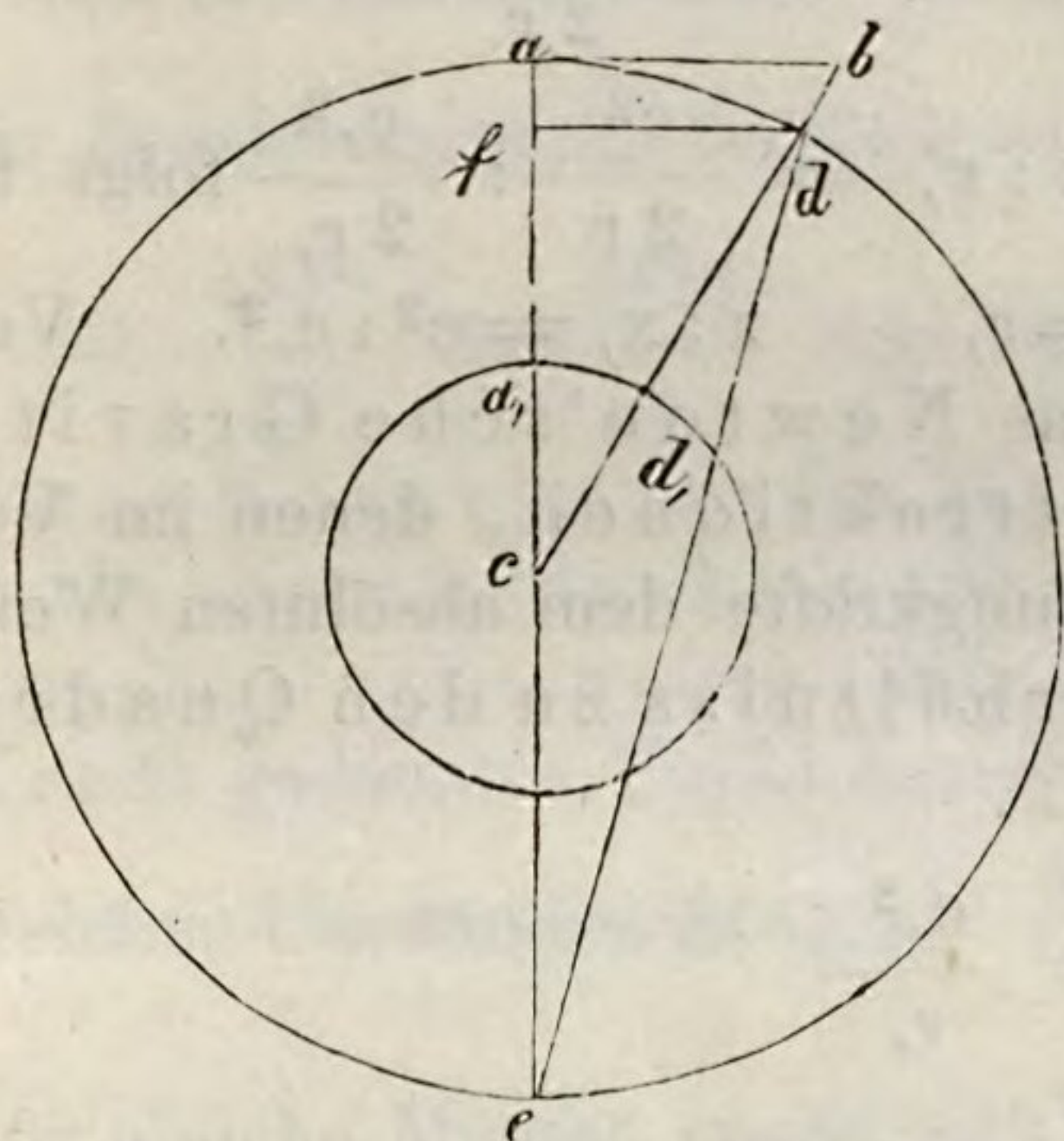
sprechen, dass die Verbindungslinie des bewegten Punktes mit dem Bahnmittelpunkt (radius vector) in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt. — Dieser Satz, welchen Kepler für die in seinem zweiten Gesetz als Ellipsen erkannten Planetenbahnen nachwies, ist so allgemein, dass man umgekehrt in allen Fällen, wo die von den Radien einer Bahn um einen festen Punkt beschriebenen Flächen der



Zeit proportional sind, schliessen kann, in jenem Punkte habe eine Centrakraft ihren festen Sitz und beeinflusse von da kontinuierlich einen Körper, welchem ursprünglich die Tendenz zu gleichförmiger Bewegung beigebracht worden war. — Bezüglich der Gestalt der resultirenden Kurve fliesst aus jenem Gesetz, dass sie eine Kurve zweiter Ordnung, ein sogenannter Kegelschnitt, also entweder eine Ellipse oder Parabel oder Hyperbel sei.

14. Bedeutet der Kreis um  $c$  die Kurve einer Centralbewegung, wovon  $ad$  der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg,  $ab$

Fig. 33.



Richtung und Grösse der momentanen Bewegungskraft,  $bd$  die Grösse ist, um welche die in  $c$  sitzende kontinuierliche Centrakraft in derselben Zeit von seiner Bahn ihn gegen  $c$  ablenkt, so würde, wenn die letztere Kraft, welche wegen ihres Bestrebens den Körper gegen den Mittelpunkt zu treiben, Centripetalkraft heisst, plötzlich aufgehoben wäre, der Körper in der nächsten Zeiteinheit um dieselbe Grösse  $bd$  von der Peripherie sich entfernt haben und dann in der Tangente derselben weiterfliegen.  $bd$  ist demnach

auch das Maass der der Centripetalkraft gleichen, in der Richtung aber ihr entgegengesetzten Centrifugalkraft (Schwungkraft).

$$bc^2 = ab^2 + ac^2$$

$$(r + x)^2 = r^2 + 2rx + x^2 = c^2 + r^2$$

$$2rx + x^2 = c^2$$

$$x = \frac{c^2}{2r}$$

$ac = cd$  sind Bahnradien ( $r$ )

$ab$  ist die dem Körper in der Zeiteinheit ertheilte Geschwindigkeit ( $c$ ).

$bd$  ist das Maass der Schwungkraft ( $x$ ).

Weil  $x$  für eine unendlich kleine Zeit auch unendlich klein ist, die höheren Potenzen unendlich kleiner Grössen gegen die niederen aber verschwinden, so wird  $x^2$  vernachlässigt und erwächst demnach obige

Formel, welche mit derjenigen eines ähnlichen Falles  $x = \frac{c^2}{2r}$  die Pro-

portion gibt  $x : x_1 = \frac{c^2}{r} : \frac{c_1^2}{r_1}$  d.h., die Schwungkraft steht

in geradem Verhältniss zum Quadrat der Geschwindigkeit und in verkehrtem zur Entfernung vom Anziehungsmittelpunkt. — Man kann diese wichtige Sache auch



noch von einer andren Seite betrachten. Wenn  $ad$  der in einer unendlich kleinen Zeit mit der Geschwindigkeit  $c$  zurückgelegte Weg ist, so kann man die Geschwindigkeit, welche in dieser kurzen Frist als gleichförmig gilt, dafür substituiren, und für den Bogen  $ad$  die bei unendlicher Kleinheit mit ihm zusammenfallende Sehne setzen, worauf  $\sphericalangle ade = R$ . Bedeutet die durch die Senkrechte  $df$  abgeschnittene  $af$  das Maass der Centripetal- oder Centrifugalkraft, so

kann für sie die obige Formel gefunden werden  $x = \frac{c^2}{2r}$ , indem, wegen  $\triangle afd \sim aed$   $af : ad : ae$

$$x : c : 2r \quad x = \frac{c^2}{2r}$$

Aus der obigen Proportion  $x : x_1 = \frac{c^2}{2r} : \frac{c_1^2}{2r_1}$  folgt für  $c = c_1$ ,  $x : x_1 = r_1 : r$  und für  $r = r_1$ ,  $x : x_1 = c^2 : c_1^2$ . Verbindet man mit letzter Gleichung das Newton'sche Gravitationsgesetz, laut welchem die Attraktionen, denen im Verlauf der Centralbewegungen die Schwungkkräfte dem absoluten Werth nach gleichen, in verkehrtem Verhältniss zu den Quadraten der Entfernungen stehen . . .

$$\begin{aligned} x : x_1 &= \frac{c^2}{r} : \frac{c_1^2}{r_1} \\ x : x_1 &= r_1^2 : r^2 \\ \text{so folgt } \frac{c^2}{r} : \frac{c_1^2}{r_1} &= r_1^2 : r^2 \\ c^2 : c_1^2 &= r_1 : r \end{aligned}$$

d. h., die Quadrate der Geschwindigkeiten stehen in verkehrtem Verhältniss zu den Entfernungen. — Zwischen Geschwindigkeit, Raum und Zeit besteht bekanntlich die Relation  $c = \frac{s}{t}$ . Nehmen wir  $s$  als Kreisperipherie, so

$$\text{wird } c = \frac{2r\pi}{t} \text{ und } c_1 = \frac{2r_1\pi}{t_1} \text{ folglich } \frac{r^2}{t^2} : \frac{r_1^2}{t_1^2} = r_1 : r$$

woraus  $r^2 : r_1^2 = r_1 t_1^2 : r t^2$  oder  $r^3 : r_1^3 = t^2 : t_1^2$  d. h., die Kubikzahlen der Bahnradien (mittlere Entfernungen vom Anziehungsmittelpunkt) verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufzeiten. (Drittes Kepler'sches Gesetz.)

Soll die Bewegung zweier Körper um denselben Mittelpunkt mit gleicher Winkelgeschwindigkeit erfolgen, so steht in Fig. 33  $ad : a_1d_1 = ac : a_1c$   $C : c = R : r$  d. h., hier muss dem Körper um so grössere Geschwindigkeit verliehen werden, je weiter seine Bahn vom Centrum entfernt liegt.



**15.** Bedeuten  $P$  und  $g$  beziehungsweise Gewicht und Maass der Beschleunigung für einen von der Erde angezogenen Körper, und veranlassen wir denselben zu einer Centralbewegung um den beliebigen Sitz einer selbständigen Kraft, deren Maass wir mit  $\gamma$  bezeichnen, darunter etwas Aehnliches verstehend, als was  $g$  für die Schwere ist, so steht das relative Gewicht oder der Druck  $Q$ , welchen der Körper gegen den Mittelpunkt seiner Centralbewegung vermöge der daselbst herrschenden relativen Anziehung ausübt, zu  $\gamma$  in demselben Verhältniss, wie  $P$  zu  $g$ , und ist  $\gamma = \frac{Q}{P} g$ . Der Weg  $af$  (Fig. 33), welchen

der Körper unter Einwirkung der in  $c$  gedachten Attraktion in der ersten Zeiteinheit macht, ist nach früherem die Hälfte des Maasses der Beschleunigung, folglich  $af = \frac{c^2}{2r} = \frac{\gamma}{2} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{g}{2}$  woraus

$Q = \frac{c^2 P}{gr} = \frac{c^2 M}{r}$  was ein Maass für die Schwungkraft eines Körpers von der Masse  $M$  ist, welcher innerhalb der irdischen Attraktionssphäre mit der Geschwindigkeit  $c$  in der Entfernung  $r$  um einen als Sitz einer selbständigen Kraft gedachten Punkt bewegt wird. In einem andern Fall unter gleichen Umständen ist  $Q_1 = \frac{c_1^2 M_1}{r_1}$ , woraus  $Q : Q_1 = \frac{c^2 P}{r} : \frac{c_1^2 P_1}{r_1}$ .

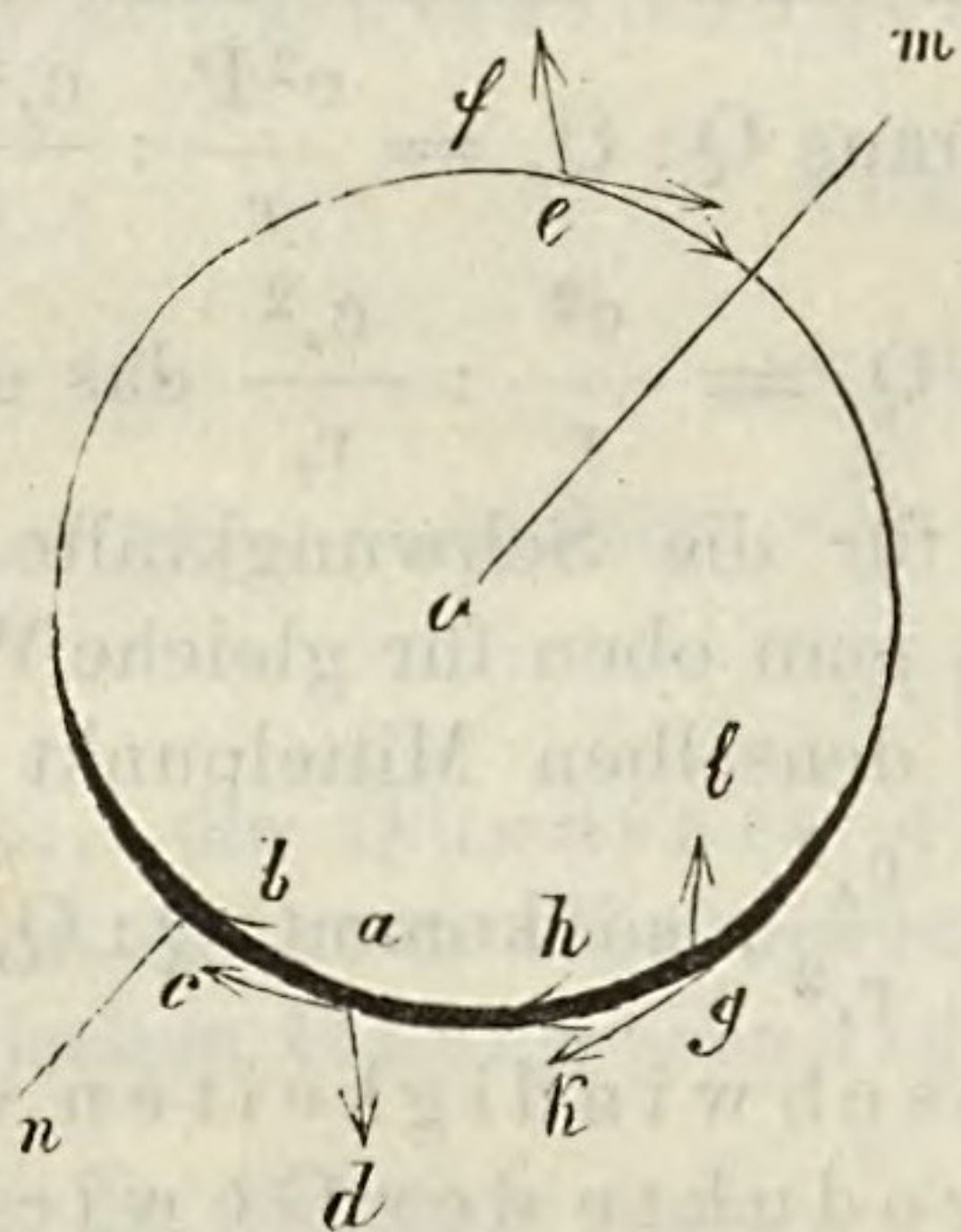
Für gleiche Massen ergibt sich daraus  $Q : Q_1 = \frac{c^2}{r} : \frac{c_1^2}{r_1}$  das oben auf anderm Weg gefundene Verhältniss für die Schwungskräfte. — Für  $r = r_1$ , steht  $Q : Q_1 = c^2 P : c_1^2 P_1$ , da man oben für gleiche Winkelgeschwindigkeiten bei Bewegung um denselben Mittelpunkt erhalten hat  $c : c_1 = r : r_1$ , woraus  $\frac{c^2}{r^2} = \frac{c_1^2}{r_1^2}$ , so kommt  $Q : Q_1 = r P : r_1 P_1$ , d. h., für gleiche Winkelgeschwindigkeiten werden die Schwungskräfte durch die Produkte der Gewichte der bewegten Körper in ihre Entfernungen vom Drehpunkt gemessen.

**16.** Eine gleichförmige Drehung um die Achse eines Kräftepaars, welches gleichzeitig auf einen starren Körper einwirkt, heisst Rotation. — Bedeutet  $n$  die Anzahl der in der Zeiteinheit gemachten (Kreis) Umläufe, so steht  $c = 2r\pi n$ . Dieser Werth wird positiv genommen, wenn die Rotation, vom Ende der Achse betrachtet, der Sternbewegung am südlichen Himmel folgt, negativ bei entgegengesetzter Richtung. — Weil jedes Atom des rotirenden Körpers die ihm mitgetheilte Bewegungsrichtung beizubehalten sucht, so wird dadurch ein der Erhaltung der Schwingungsebene analoges Beharren



der freien Rotationsachsen gesichert. Finden jedoch von Aussen auf das rotirende System fremdartige Einflüsse statt, so kann ein Abweichen und Schwanken der Achse hervorgerufen werden. Das nächste Beispiel ist die im Allgemeinen konstante Neigung der Erdaxe gegen die Ekliptik, wodurch der regelmässige Wechsel der Jahreszeiten und die scheinbar einzig feste Stellung des Polarsterns bedingt wird. Gerade wegen dieser Schiefe aber entfalten sich eigenthümliche Anziehungsverhältnisse von Seite der Sonne her und dazu kommen attraktive Einflüsse des Mondes, deren Gesammtheit die auf eine innerhalb enger Grenzen periodisch verlaufende Verrückung der Erdachse zurückführbaren astronomischen Erscheinungen der Präzession der Nachtgleichen und der Nutation der Erdachse unterhält. Man kann diese Einflüsse dadurch darstellen, dass man an den Achsen des Bohnenberger'schen, Fessel'schen, Heinen'schen Rotationsapparates Gewichte anbringt, welche dem Pol eine langsame Bewegung in der der Rotation entgegengesetzten Richtung ertheilen. — Jedem Bestreben zur Lagenänderung der Achse gegenüber er-

Fig. 34.



wachen Gegenkräfte, welche dieselbe corrigiren, oder doch beschränken. — Hatte die zur Achse  $mn$  senkrechte Scheibe  $o$  horizontal rotirt, und es wollte eine Kraft sie in eine Lage bringen, in welcher die rechte Hälfte niedriger stände, als die linke, so würde irgend einem Punkt der erstren z.B.  $a$  zugemuthet, genügende Cohäsion der Scheibe vorausgesetzt, von unten rechts, nach oben links, etwa in der Richtung  $ab$  zu gehen, während er vermöge der Beharrlichkeit den horizontalen Weg  $ac$  beschreiben will. Betrachten wir  $ab$  als die eine Seitenkraft von  $ac$ , so wird eine zweite  $ad$  frei, welche den Punkt  $a$  abwärts drückt. Durch ähnliche Zerlegung erwächst bei  $e$  die aufwärts drückende Kraft  $ef$ . Beide suchen vermöge ihres Angriffs und ihrer Richtung dem  $90^\circ$  davon entfernten Punkt  $g$  eine Lage zu geben, in welcher er, statt die Bewegung  $gh$  zu machen, nach  $gk$  ginge. Ist  $gk$  die eine Seitenkraft von  $gh$ , so wird eine andre  $gl$  frei, welche nach Oben wirkend die beabsichtigte Senkung der Achse und Scheibe bekämpft. — Die Kraft, welche eine Lagenänderung der Achse erstrebte, war soweit als momentan zu denken. Wirkt sie als konstanter Druck, durch welchen z.B. der Punkt  $g$  gesenkt wird, so äussert sich diese Senkung, wie aus einer der



vorigen Darstellung umgekehrten Schlussfolgerung erhellt, als ein abwärts gehender Druck  $ad$  bei  $a$ , und ein aufwärts gehender  $ef$  bei  $f$ . Beide heben sich aber nicht auf, sondern wegen der Continuität des Drucks erfolgen Oscillationen, welche am Punkte  $m$  als kleine Kreisbewegungen in der Richtung der rotirenden Scheibe auftreten, während diese Richtung die verkehrte wird, wenn der gedachte Druck von  $g$  aufwärts geht.

### Beispiele.

1. Man soll die Schwingungszeit eines Pendels von  $3'$  Länge an einem Ort berechnen, wo das Maass der Anziehung  $g = 31,25'$  ist.

$$t = 3,1415 \sqrt{\frac{3}{31,25}} = 3,1415 \cdot \frac{9,68}{31,25} = 0,97026^{\text{sec.}}$$

2. Wie viel Schwingungen in der Minute macht ein  $4'$  langes Pendel in Berlin, wenn daselbst das Sekundenpendel  $3,168'$  misst?

$$n : 1 = \sqrt{3,168} : 2 \quad n = \frac{1}{2} \cdot 1,78 = 0,89 \text{ in der Sekunde}$$

53,4 in der Minute.

3. Ein Sekundenpendel hat am Meeresspiegel eines bestimmten Ortes eine Länge von  $3,16'$ . Welche Länge muss man ihm geben, wenn es nach  $5000'$  senkrechter Erhebung von diesem Punkt aus seine Schwingungszeit beibehalten soll?

$$g = 3,16 \cdot 3,1415^2 = 31,156$$

$$g : g_1 = e^2 : e^2$$

$$31,156 : g_1 = 20325000^2 : 20320000^2$$

$$g_1 = \frac{82580480}{82584549} \cdot 31,156 = 31,125$$

$$l = 31,125 : 3,1415^2 = 3,157'.$$

4. Welche Schwingungszeit hat ein physisches Pendel, das aus einer gleichförmigen schweren 1 Meter langen Stange besteht?

$$t = 2 \cdot 3,1415 \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{9,81}} = 1,633^{\text{sec.}}$$

5. Wie weit von der Drehungsachse ist die Masse anzubringen, deren Gewicht der Summe von vier festverbundenen Massen gleicht, welche beziehungsweise 6, 10, 3, 11 Kilogr. wiegen und 5, 2, 1, 3, 2, 5<sup>m</sup> von jener Achse entfernt sind, wenn die Trägheitsmomente äquivalent bleiben sollen?

$$Mx^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

$$30 \cdot x^2 = 150 + 44,1 + 27 + 68,75$$

$$x = \sqrt{96,616} = 9,829^{\text{m.}}$$

6. Wie viel Minuten und Sekunden geht eine mit Sekunden-



pendel versehene, am Aequator richtig zeigende Uhr voran, wenn sie an den Pol gebracht würde, die beziehungsweisen Längen des Sekundenpendel an Aequator und Pol aber 3,15750' und 3,17388' betragen?

Das dem Pol entsprechende Sekundenpendel macht daselbst täglich 86400 Schwingungen,

$$n^2 : 86400^2 = 3,17388 : 3,15750 \quad n = 86400 \sqrt{\frac{3,17388}{3,15750}} \\ = 86623$$

86623—86400 = 223' Schwingungen macht das dem Aequator entsprechende Sekundenpendel am Pol täglich zu viel, folglich geht die Uhr um 3 Minuten 43 Sekunden vor.

7. Wie lang ist das Sekundenpendel in London, dessen geographische Breite 51° 31' 8'' beträgt?

$$l = 0,99102557 + 0,00507188 \sin^2 51^\circ 31' 8'' \\ \sin 51^\circ 31' 8'' = 0,7828132 \\ = 0,99102557 + 0,003108032 = 0,994133602^m$$

8. Wie weit ist Merkur von der Sonne entfernt, wenn man weiss, dass er in 88 Tagen einen Umlauf um dieselbe vollendet, während die in 365,2564 Tagen die Sonne umkreisende Erde im Mittel 20 Million Meilen von ihr absteht?

$$88^2 : 365,2564^2 = x^3 : 20000000^3 \\ x = 8000000 \text{ Meilen.}$$

9. Um wie viel Mal müsste, wenn die irdische Centrifugalkraft am Aequator thatsächlich  $\frac{1}{289}$  der Schwere beträgt, die Umdrehungsgeschwindigkeit zunehmen, damit jeder Körper in beliebiger Entfernung von der Erdoberfläche seines Gewichtes beraubt, in der Luft schweben bliebe?

Weil die Centrifugalkraft im Quadratverhältniss der Geschwindigkeit wächst, so nimmt, wenn letztere 17fach wird, erstere  $17^2 = 289$  Mal zu, ist sonach der Schwere gleich geworden.

10. Wie gross ist die Schwungkraft einer Bleikugel von 10 Loth Gewicht, welche an einem Faden von 2' Länge mit 5' Geschwindigkeit geschwungen wird?

$$x = \frac{5^2 10}{2 \cdot 31} = 4,032 \text{ Loth.}$$

11. Ein Eisenbahnzug von der Masse M fährt auf einer Bahn von 5' Spurweite und sein Schwerpunkt liegt 4' über der Schienenoberfläche. Welche Maximalgeschwindigkeit darf der Zug annehmen, um in einer Bahnkurve von 240' Krümmungshalbmesser durch die freiwerdende Centrifugalkraft nicht aus den Schienen zu springen?



Das statische Moment der Centrifugalkraft, dargestellt im Produkt ihres Maasses  $\frac{c^2 M}{r}$  in die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkt, der Schienenoberfläche, muss gleich sein dem statischen Moment der Schwere, berechnet durch das Produkt des Gewichtes  $g M$  in die halbe Breite der Unterstützungsfläche.

$$4 \cdot \frac{c^2}{240} M = \frac{5}{2} \cdot 31,25 M$$

$$c = \sqrt{\frac{5 \cdot 31,25 \cdot 240}{8}} = 68,45' \text{ in der Sekunde.}$$

## VI.

### Die Flüssigkeiten.

1. Eine sich selbst überlassene von allen äusseren Kräften unabhängige Flüssigkeit nimmt bei der leichten Beweglichkeit ihrer Theilchen eine Form an, deren Regelmässigkeit jedem materiellen Punkte des Systems vollkommenes Gleichgewicht verbürgt. Von allen stereometrischen Körpern bietet diese einem idealen Attraktionsverhältniss entsprechende Anordnung nur die Kugel. Dass die Kugelgestalt der einst oder noch flüssigen Massen nicht rein zur Beobachtung kommt, hat theils in der bei Rotationen freiwerdenden Centrifugalkraft seine Ursache, wie an den aus feurig-flüssigem Zustand allmählig erstarrten Himmelskörpern, theils in der Betheiligung äusserer Kräfte, namentlich der Erdanziehung auf die innerhalb des Wirkungskreises unsres Planeten zur Betrachtung gelangenden Flüssigkeiten, denen nur bei sehr geringer Ansammlung und während schnellen freien Falles die Annahme der Kugelgestalt möglich ist.

2. Sofern die Erde im Ganzen als eine Kugel betrachtet werden kann, bildet jeder freie ruhende Flüssigkeitspiegel ein Stück ihrer Oberfläche; indem aber für gering ausgedehnte Strecken die Wölbung unmerklich ist, so darf gesagt werden, dass jede freie ruhende Flüssigkeitfläche die Horizontalebene darstelle, zu welcher die durch ein Bleiloth bestimmte Richtung der Schwere senkrecht ist.

3. In Flüssigkeiten verbreitet sich jeder Druck nach allen Richtungen mit derselben Stärke, indem wegen ihrer leichten Verschiebbarkeit die Flüssigkeitstheilchen rascher



einer Ausweichung nach jeder Seite hin fähig sind, als in einem festen Körper, an welchem die Wirkung des Druckes stets überwiegend in der geradlinigen Verlängerung seiner Richtung zu Tage tritt.

Stehen unter den gewöhnlichen Verhältnissen der Erdanziehung grössere Flüssigkeitsmassen neben- und übereinander, so kann man sich das ganze Volum in verticale Säulen vom Durchmesser eines Molekules zerlegt denken. Der seitliche Druck, welchen eine beliebige von ihnen gegen ihre Nachbarn übt, wird vollkommen im Gleichgewicht gehalten durch den von ihnen ausgehenden Gegen-  
druck. In verticaler Richtung aber hat jedes Flüssigkeitstheilchen ausser seinem eigenen Gewicht einen um so grösseren Druck auszuhalten, je mehr Molekules über ihm stehen, woraus sich ergibt, dass die Grösse des Drucks von der Höhe der Flüssigkeitssäule in geradem Verhältniss abhängt. Dabei ist gleichgiltig, wie viele solcher Drucksäulen nebeneinander verlaufen, so dass die Flächenverbreitung und die Form der Flüssigkeitsmasse überhaupt für den in einer bestimmten Tiefe herrschenden Druck völlig ohne Bedeutung ist. Flächeninhalt der Grundfläche, Höhe der darüber stehenden Säule, Dichte der Flüssigkeit, nicht aber ihre Menge, bestimmen den hydrostatischen Bodendruck. Dies ist für senkrechte, gleich weite Gefässe an und für sich klar, denn hier gleicht der fragliche Druck dem Gewicht. Ist dagegen das Gefäss kegelförmig oder bauchig nach oben erweitert, übrigens mit dem erst gedachten von gleicher Grundfläche, so kann man sich vorstellen, dass die letztre überragende Seitenwand in unendlich viele treppenartig angeordnete Absätze zerfällt, deren jeder den Druck der darüber schwebenden Wassersäule übernimmt, so dass, da die Seitendrucke sich gegenseitig aufheben, für die Grundfläche bloss derjenige Druck übrig bleibt, welcher dem Gewicht der unter Abrechnung der seitlichen Ausbuchtungen unmittelbar senkrecht darüber schwebenden Wassermenge gleicht. Für den Fall, dass das Gefäss oben enger wird, kann man die allmälige, geschweifte oder irgendwie geformte Verengung auf die einfache Anordnung zurückführen, dass über einem regelmässigen gleichweiten Gefäss vom Querschnitt  $m$  und der Höhe  $l$  ein engerer Cylinder vom Querschnitt  $n$  und der Höhe  $h$  aufgesetzt sei, dessen Wassersäule auf die im weiten Gefäss befindliche Flüssigkeit am Berührungsspiegel den Druck  $hn$  übt, wobei die Dichte als Einheit genommen wird. Weil sich aber in jeder Flüssigkeit der Druck nach allen Richtungen mit gleicher Stärke verbreitet, so erleidet jeder Flächenabschnitt der Grundfläche  $m$  von der Ausdehnung  $n$  den Druck  $hn$  und dazu von der im weiten Gefäss selbst befindlichen Wassermasse her  $\frac{m}{p} l$ , wenn der Querschnitt der Aufsatzröhre



in demjenigen des unteren Gefässes  $p$  mal enthalten ist. Demnach lastet auf der ganzen Grundfläche dieses der Druck

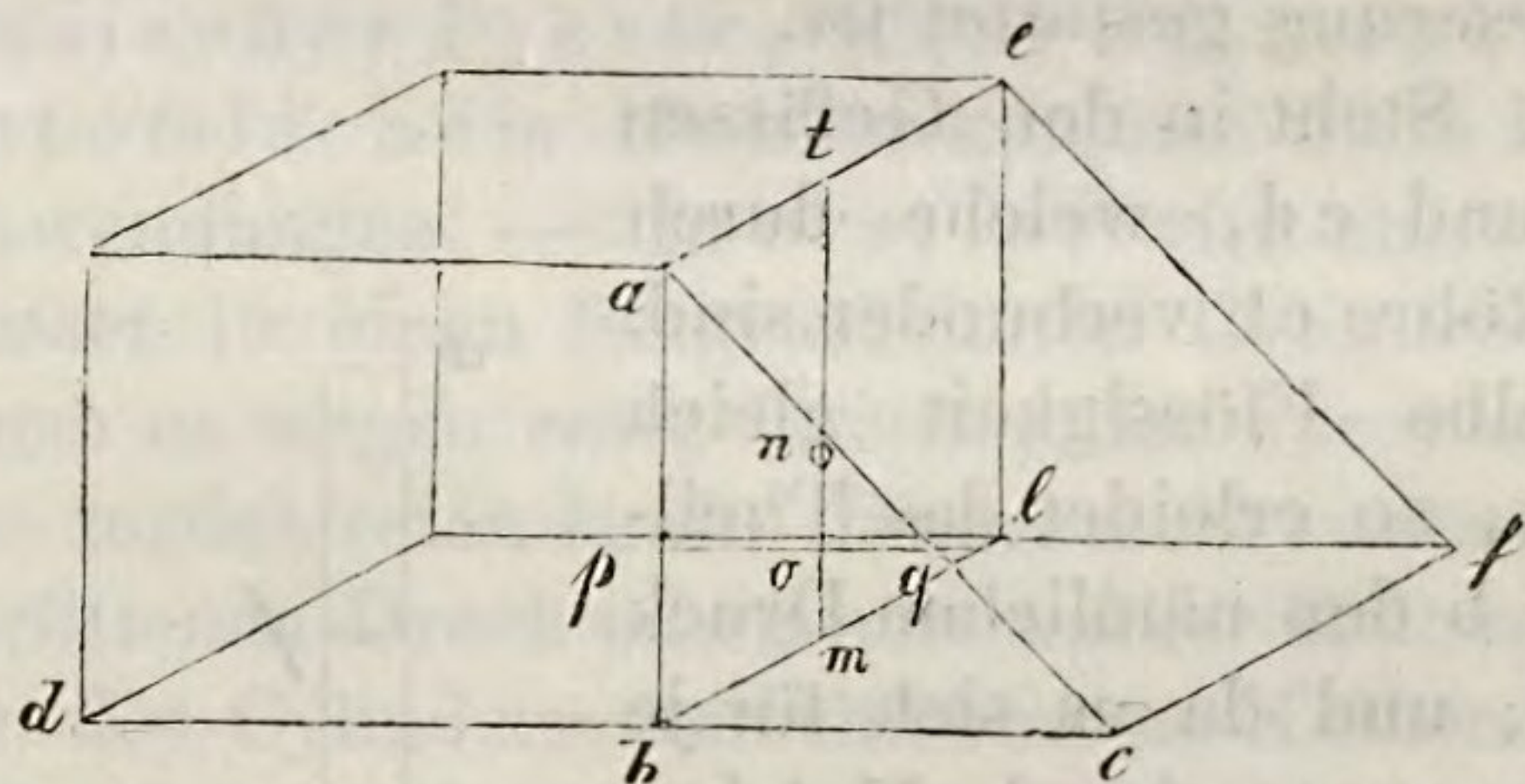
$$p \left( h n + \frac{m}{p} l \right) = h p n + m l$$

$$\begin{aligned} p n &= m \\ &= m \left( h + l \right) = m H, \end{aligned}$$

worin  $H$  die senkrechte Entfernung der freien Flüssigkeitsfläche im Ansatzrohr von der Grundfläche  $m$  des weiten Gefässes, also die Gesamthöhe der Wassersäule bedeutet.

Der Druck auf ein bestimmtes Stück der Seitenfläche eines mit Flüssigkeit angefüllten Gefässes gleicht dem Gewicht einer Flüssigkeitsäule, dessen horizontal zu denkende Grundfläche dem gegebenen Seitenflächenstück, dessen Höhe aber der Entfernung dieses Wandstückes vom freien Spiegel der Flüssigkeit gleich ist. Dies folgt, nachdem die geschilderte Grösse als Maass des Bodendruckes bereits anerkannt wurde, unmittelbar aus dem hydromechanischen Grundsatz der allseitig gleichen Druckverbreitung. Werden die Seitendrucke auf verschiedene Punkte der Kante  $ab$  durch die Senkrechten  $p q$ ,  $b c$  u. s. w. ausgedrückt, deren Endpunkte sämtlich in  $a c$  liegen, wenn  $a b = b c$ , so stellt das Dreieck  $abc$  den Seitendruck auf die Kante  $ab$  vor. Der Angriffspunkt der Resultanten aller elementaren Drucke heisst Mittelpunkt des Drucks, und wird für die Kante  $ab$  gefunden, indem man vom Schwerpunkt  $o$  des Dreiecks  $abc$   $op$  parallel der horizontalen  $bc$  zieht, worauf  $bp = \frac{1}{3} ab$ . Ein Prisma von der Grundfläche  $abc$  und der Höhe  $ae$  misst den Seitendruck auf die Fläche  $be$  und der Mittelpunkt dieses Druckes liegt in  $n$ , wenn  $bm = \frac{1}{2} bl$ ,  $tm \perp bl$  und  $mn = \frac{1}{3} tm$ . Vergleicht man den Seitendruck mit dem Bodendruck, welcher für die Kante  $bd$  vom Parallelogramm  $ad$  für die Grundfläche durch das Parallelepipiped  $de$  vorgestellt ist, so

Fig. 35.



steht  $\triangle abc = \frac{1}{2} ab \cdot bc = \frac{1}{2} ab^2$   $\left\{ \begin{array}{l} \triangle : \text{Par} = \frac{1}{2} ab : bd \\ \text{Par} \cdot ad = ab \cdot bd \end{array} \right.$







zontalen Armes von beiden Seiten gleicher Druck statthat, so ist kein Grund zu einer Bewegung da. Dass in communicirenden Gefässen von beliebigem Volum die Flüssigkeitspiegel in dieselbe Horizontalebene fallen (hydrostatisches Paradoxon), ist von grosser Wichtigkeit für viele mechanische Einrichtungen und natürliche Vorkommnisse. Da die Flüssigkeitsmasse ab der cd im relativen Druckverhältniss das Gleichgewicht hält, jede für sich aber ein der Grundfläche und Höhe entsprechendes Gewicht besitzt, durch welches eine der erstren gleiche Fläche gepresst wird, so übt, wenn die Röhre ab ganz, cd aber nur bis e gefüllt ist, die über f stehende Masse af einen bei e nach Oben gehenden Druck aus, welcher dem Gewicht der fehlenden Wassermasse de gleicht. Dieser Druck wird jedoch nur nutzbar, wenn der Spiegel e wirklich steigt, wozu nöthig ist, dass der Spiegel a um eine verhältnissmässige Grösse sinkt. Ist der Durchmesser des weiten Gefässes  $n$  mal so gross, als derjenige des engen, so bedarf man der  $n^2$ fachen Wassermasse, um in erstrem eine Flüssigkeitsäule von derselben Höhe zu erzeugen, als in letztem. Desshalb steigt die Flüssigkeit in cd um  $n'$ , wenn sie in ab um  $n^2$  Fuss fällt, übt aber auch den  $n^2$ fachen Druck des Gewichtes der in ab über f stehenden Flüssigkeit aus. — In Bramah's hydraulischer Presse, Real's Extraktivpresse, Wolf's anatomischem Heber kommen diese Principien zu fruchtbaren Anwendungen. — In ersterer wird aus einem Wasserreservoir das Wasser in einen festgearbeiteten Cylinder hinübergepumpt, aus welchem es wegen eines Ventils, das nur den Zufluss gestattet, nicht mehr zurücktreten kann. Immer mehr zusammengepresst theilt es den erlittenen Druck einem mit starker Reibung in der oberen Grundfläche des Cylinders verschiebbaren Kolben mit, welcher, in die Höhe gehend, zwischen seiner oberen Fläche und der starkbefestigten Gegenplatte beliebige Gegenstände mit grosser Gewalt zusammenpresst. Hier wird die höhere Wassersäule der engeren Röhre durch den mittels der Pumpe hervorgerufenen Druck ersetzt. — Die zweite besteht aus einem Cylinder, welcher durch zwei fein durchlöchernte horizontale Scheidewände in drei Abtheilungen zerfällt, im Deckel aber eine luft- und wasserdicht angeschraubte enge sehr hohe Röhre trägt. Diese enthält Wasser, das den nöthigen Druck zu üben hat, die oberste Zelle die Flüssigkeit, in welcher eine Auflösung gemacht werden soll, die mittlere den aufzulösenden gepulverten Körper, die unterste, durch einen Hahn entleerbar, die Auflösung, welche so erzielt wird, dass in Folge des von der Wassersäule geübten, dem Gewicht einer Wassermasse von der Grundfläche des weiten Cylinders und der Höhe der engen Röhre gleichen, Drucks die Auflösungsflüssigkeit durch die aufzulösende Substanz getrieben wird. — Der letzte kann einfach hergestellt



werden, indem man ein weites, am offenen Ende mit umgestülptem Rande versehenes Blechgefäß durch einen horizontalen Schenkel mit einer hohen engen Glasröhre verbindet. Giesst man in diese Wasser, so treibt dessen Druck ein luftdicht über den erwähnten Wulst gebundenes thierisches Gewebe so beträchtlich auseinander, dass dessen feinerer Bau bequem und deutlich zu erkennen ist. — Principiell gehört hierher auch Reichenbach's Wassersäulenmaschine, welche indess eine zu komplizirte Einrichtung ist, um ohne Modell oder Zeichnung in ihrer zur Hebung von Flüssigkeiten über bedeutende Höhen angewendeten Wirksamkeit verstanden zu werden. Mittels neun solcher Maschinen, in denen im Wesentlichen eine Wassersäule, das sogenannte Aufschlagwasser, einem in einem Cylinder verschiebbaren Kolben eine weiter übertragbare hin- und hergehende Bewegung ertheilt, wird von Reichenhall in Bayern aus auf einem 30 Stunden langen Weg die Salzsole zum Versieden nach Traunstein und Rosenheim geleitet. — Die Nivellir- oder Wasserwaage der praktischen Geometrie zeigt die unmittelbarste Anwendung der communicirenden Röhren, indem der gleichhohe Stand in den senkrechten Schenkeln einer gleichweiten, zweimal rechtwinklig gebogenen, in Messing gefassten Glasröhre die Horizontalinie bestimmt. In der Libelle der Astronomie dagegen muss bei vollkommen horizontaler Stellung eine Luftblase in einer nicht ganz mit Weingeist gefüllten Röhre genau in der Mitte obenaufschwimmend den höchsten Stand einnehmen. — Das Erscheinen des Horizontalwassers, das Hervorbrechen von Quellen an manchen Stellen mit konstantem oder periodischem Lauf, die Anlage artesischer Brunnen gibt ebenfalls erwünschte Gelegenheit zur Besprechung dieser hydromechanischen Thatsache.

Enthalten die beiden communicirenden Röhren Flüssigkeiten verschiedener Dichte, so fallen ihre Spiegel in zwei verschiedene Ebenen, deren Abstand zur Differenz der Dichten beider Flüssigkeiten in geradem Verhältniss steht, so dass, wenn die eine als bekannt angenommen wird, diejenige der andern daraus beurtheilt werden kann.

5. Weil der von einem im Innern einer Flüssigkeitsmasse befindlichen Molekül nach allen Seiten ausgehende Druck vom Gegen- druck im Gleichgewicht gehalten wird, so bleibt es, abgesehen von äusseren Einwirkungen, vollkommen in Ruhe. Könnte man dasselbe ohne Störung der übrigen Verhältnisse herausnehmen und an dessen Stelle einen andern Körper von genau demselben Umfang und gleichem Gewicht bringen, so würde auch dieser weder steigen noch sinken, weil der ganze durch sein Gewicht repräsentirte Druck von der umgebenden Flüssigkeit getragen und aufgehoben wird. Indem er deshalb, vollständiges Untertauchen vorausgesetzt, an jeder Stelle der



Flüssigkeit in stabilem Gleichgewicht verharret, seines von der Schwere abgeleiteten Bestrebens der Erdoberfläche sich zu nähern also ganz entäussert scheint, kann man sagen, dass er in diesem Zustand sein ganzes Gewicht, welches dem Gewicht der von seinem Umfang verdrängten also gleich voluminösen Wassermasse gleicht, verloren hat. — Bringt man ferner in eine Flüssigkeit einen Körper, welcher mehr wiegt, als das gleichgrosse Volum der erstren, so kann man sein Gewicht zerlegen in die Summanden  $a + b$ , deren einer  $a$  dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleicht, mithin aufgehoben ist, der andre  $b$  aber den Ueberschuss bedeutet, kraft dessen der Körper von der Schwere in der Flüssigkeit gerade wie in der Luft zu Boden gezogen wird. Der hierdurch dargestellte Druck auf eine Unterlage oder sein Gewicht ist somit um den Summanden  $a$  kleiner, als sein absolutes Gewicht in der Luft, oder der Körper hat in der Flüssigkeit so viel von seinem Gewicht verloren, als die von seinem Umfang verdrängte Flüssigkeit gleichen Volumens wiegt. Der Fall des schweren Körpers in der Flüssigkeit erfolgt nach denselben Gesetzen, als in der Luft, nur langsamer, weil der Widerstand bedeutender ist. — Wird endlich ein Körper vom Gewicht  $a - b$ , worin  $a$  das Gewicht eines gleichgrossen Flüssigkeitsvolums bedeutet, versenkt, so verliert er nach früherem  $a$  vollständig und behält das negative Gewicht  $- b$ . Diese negative Grösse deutet hier, wie immer in solchen algebraisch behandelten Bewegungsfällen, auf eine umgekehrte Richtung, und ist in der That nichts Andres, als der Auftrieb, vermöge dessen der Körper, welcher verhältnissmässig leichter, als die fragliche Flüssigkeit ist, in der Flüssigkeit steigt und an deren Oberfläche schwimmt, dabei aber soweit eintaucht, dass das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit seinem ganzen Gewichte gleicht. — Im schwimmenden Zustand herrscht stabiles Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt des Körpers senkrecht unter dem Schwerpunkt des verdrängten Wassers liegt. Jedoch ist auch sonst der sichere Stand oder Lauf schwimmender Gegenstände, namentlich der Schiffe, in denen bekanntlich der Ballast die Erniedrigung des Schwerpunktes erzielt, nicht gefährdet, wenn nur der Schwerpunkt des Körpers niedrig genug und dem Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse nah genug liegt, dass, falls der letztre bei einer durch Wind oder andre Einflüsse hervorgebrachten Lagenveränderung des Körpers seitlich verschoben wird, die von diesem Schwerpunkt aus konstruirte Verticale die verlängerte Verbindungslinie des ursprünglichen Schwerpunkts der verdrängten Flüssigkeit mit demjenigen des Körpers in einem Punkt — dem Metacentrum, schneidet, welcher noch oberhalb des Körperschwerpunktes liegt.

6. Wie ein schwererer Körper in der nämlichen Flüssigkeit



tiefer einsinkt, als ein leichterer, so wird derselbe feste Körper in einer Flüssigkeit von grösserer Dichte weniger zu verdrängen haben, bis das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit seinem vollen Gewicht gleich wird, als in einer weniger dichten, oder um so tiefer einsinken, je geringer die Dichte der Flüssigkeit ist. Dies umgekehrte Verhältniss der Senktiefe zur Flüssigkeitsdichte benutzt man in den Aräometern zur Bestimmung der Dichte oder des relativen Stoffgehaltes einer Flüssigkeit. Im Wesentlichen besteht ein Aräometer aus einer engen Glasröhre, an welche unten eine Erweiterung geblasen ist, in der etwas Quecksilber den Schwerpunkt soweit nach Unten verlegt, dass ein Schwimmen in senkrechter Stellung gesichert ist. Das Wichtigste ist die Eintheilung der Skala. Von Aelteren begegnen uns hier die Namen Beaumé, Cartier, Beck, Meissner. Das Beaumé'sche Aräometer ist für Flüssigkeiten schwerer und leichter als Wasser gesondert regulirt. Der Nullpunkt der erstren Theilung bezeichnet die Stelle, bis zu welcher das Instrument im destillirten Wasser einsinkt und die Zahl 15 den Punkt, der in einer Lösung von 3 Th. Kochsalz auf 17 Th. Wasser erreicht wird. Von den zwischen diesen Marken liegenden 15 gleichen Graden werden 50 nach abwärts aufgetragen. Die Zahl, bis zu welcher das Aräometer in einer gegebenen Flüssigkeit eintaucht, hat nur einen relativen Werth, von welchem aus auf die Dichte nur ein Schluss zu ziehen ist, wenn man aus zahlreichen Beobachtungen die Relation zwischen den Graden des Aräometer und den spezifischen Dichten der Flüssigkeiten abgeleitet hat. So entspricht dem Beaumé'schen Grade:

|    |                                  |        |
|----|----------------------------------|--------|
| 0  | das spezifische Gewicht (Dichte) | 1      |
| 1  | „                                | 1,007  |
| 10 | „                                | 1,027  |
| 20 | „                                | 1,157  |
| 30 | „                                | 1,256. |

Für Flüssigkeiten leichter als Wasser entspricht der Nullpunkt dem Einsinken in einer Lösung von 1 Th. Kochsalz in 9 Th. Wasser. Die Länge von hier bis zu der im destillirten Wasser erreichten Stelle wird in 11 gleiche Grade getheilt und mehrere derselben werden von dieser nach aufwärts getragen. Bezüglich spezieller Beobachtungsangaben gilt dasselbe wie oben. Dem Grad

|    |                       |       |
|----|-----------------------|-------|
| 50 | entspricht die Dichte | 0,784 |
| 40 | „                     | 0,824 |
| 30 | „                     | 0,875 |
| 20 | „                     | 0,933 |
| 10 | „                     | 1     |



Am häufig gebrauchten Cartier'schen Aräometer sind die Grade um  $\frac{1}{15}$  der Beaumé'schen Eintheilung grösser. — Von höherem wissenschaftlichen Werth sind die Skalen-Aräometer oder Volumeter, wie sie durch Gay-Lussak und Frankoeur eingeführt wurden. Die Einrichtung beruht auf dem Satz, dass bei gleichen Gewichten die Dichten sich umgekehrt, wie die Volumina verhalten. An den Volumetern für Flüssigkeiten schwerer als Wasser steht nah dem oberen Ende der Wassersenkungspunkt mit 100, welcher Grad der Dichte 1 entspricht. Bereitet man sich durch Mischung von Wasser und Schwefelsäure eine Flüssigkeit, deren Dichte genau auf 1,25 adjustirt wurde, so ist der jetzige Einsenkungspunkt mit 80 zu bezeichnen, weil  $1,25:1 = 100:80$ . Theilt man den Raum zwischen beiden bemerkten Stellen in 20 gleiche Theile und setzt diese Theilung unterhalb 80 fort, so ist der Apparat fertig. — Im Volumeter für leichtere Flüssigkeiten als Wasser steht der dem letzteren entsprechende Punkt (100) am untren Ende und an der Einsenkungsstelle in einer Mischung von Wasser und Weingeist mit der Dichte 0,8 der Grad 125, weil  $0,8:1 = 100:125$ . Schmidt konstruirte ein Aräometer, auf welchem die spezifischen Dichten unmittelbar angegeben sind, wodurch aber die ungleiche Grade verlangende Eintheilung sehr erschwert ist.

Von Aräometern für besondere Flüssigkeiten sei das Alkoholometer in Betracht gezogen, dessen Einrichtung darauf Rücksicht zu nehmen hat, dass wegen der bei Mischung von Wasser und Weingeist statthabenden Zusammenziehung das spezifische Gewicht stets grösser als das berechnete arithmetische Mittel wird. Gibt das Instrument bei  $15,55^{\circ}\text{C}$ . die Dichte

|         |                    |     |                         |        |        |
|---------|--------------------|-----|-------------------------|--------|--------|
| 0,9991, | so entspricht dies | 0   | Proc. reinem Alkohol v. | 0,7939 | Dichte |
| 0,9857  | „                  | 10  | „                       | „      | „      |
| 0,9761  | „                  | 20  | „                       | „      | „      |
| 0,9646  | „                  | 30  | „                       | „      | „      |
| 0,9510  | „                  | 40  | „                       | „      | „      |
| 0,9335  | „                  | 50  | „                       | „      | „      |
| 0,9126  | „                  | 60  | „                       | „      | „      |
| 0,8892  | „                  | 70  | „                       | „      | „      |
| 0,8631  | „                  | 80  | „                       | „      | „      |
| 0,8332  | „                  | 90  | „                       | „      | „      |
| 0,7939  | „                  | 100 | „                       | „      | „      |

Werden die Zahlen der zweiten Reihe auf die Skala geschrieben, und die Zwischenräume je zweier in 10 gleiche Theile zerfällt, so entstehen die Procentaräometer, wie sie nach Gay-Lussak für Frankreich, nach Tralles für Deutschland gesetzlich eingeführt sind.



Auch hier ist eine in den grösseren Abschnitten merkliche Ungleichheit der Eintheilung angezeigt.

Hier schliessen sich die Senkwaagen an. Die Nicholson'sche besteht aus dem metallnen cylindrischen, oben und unten kegelförmig zulaufenden Schwimmer, welcher unten eine mit zwei entgegengesetzt — aufwärts und abwärts — gerichteten Höhlungen versehene Schale, oben eine kleine Platte trägt. Auf dem Verbindungsdraht dieser mit dem Schwimmer ist die Stelle markirt, bis zu welcher bei der Anwendung das Instrument in die Flüssigkeit eintauchen muss. Legt man einen Körper vom absoluten Gewicht  $x$  auf die Platte und muss noch das Gewicht  $y$  darauf zulegen, um die Waage bis zur Marke einsinken zu machen, während ohne jenen Körper zu gleichem Zweck das Gewicht  $m$  aufgelegt werden musste, so ist  $x = m - y$ . Darauf wird der Körper, falls er schwerer als Wasser ist, in die obere, sonst in die untere Höhlung der Schale gebracht und die Platte wieder mit soviel Gewicht  $z$  belastet, bis die Marke den Wasserspiegel berührt, so ist  $z - y = n$  der Gewichtverlust des Körpers im Wasser, also das Gewicht des letzteren mit gleichem Volum, und ist seine Dichte, welche sich zu der als Einheit genommenen des Wassers verhält, wie  $x$  zu  $n$ , gemessen durch den Quotienten  $\frac{x}{n}$ . — An Tralles' Senkwaage ist ein schweres

Sphäroid, welches im Wasser zu schwimmen hat, durch einen getheilten Arm mit einem zweimal gebogenen Draht verbunden, der unten eine Waagschale und oben seitlich ein die senkrechte Stellung verbürgendes Gegengewicht trägt. — Fahrenheit's Senkwaage besitzt wie die erste einen Schwimmer, woran unten zur Erniedrigung des Schwerpunkts eine mit Quecksilber belastete Kugel, oben eine Schale angebracht ist. Beträgt das Gewicht des ganz aus Glas gefertigten Instrumentes  $x$  und muss man es mit  $y$  belasten, damit es bis zu einer auf dem Stile zwischen Schwimmer und (obrer) Gewichtschale angebrachten Marke in destillirtes Wasser taucht, so ist  $x + y$  sein Gewichtverlust im Wasser und wenn die Zulage  $z$  es ebensoweit in eine andre Flüssigkeit einsinken macht,  $x + z$  sein Gewichtverlust in ihr, folglich  $\frac{x + z}{x + y}$  die Dichte der letzteren.

Wir haben an der Nicholson'schen Senkwaage das allgemeine Schema der spezifischen Gewichtbestimmung eines festen und an der Fahrenheit'schen eines flüssigen Körpers vorgelegt, wollen jedoch bei der Wichtigkeit dieser Anwendung des Archimedischen Princips vom Gewichtverlust der Körper in Flüssigkeiten noch einen Blick darauf werfen, nachdem wir erinnert haben, dass das der Dichte proportionale spezi-



fische Gewicht eines Körpers nichts andres sei, als das Verhältniss des von seiner Materie eingenommenen Raumes zur (absoluten) Schwere derselben. — Ist das absolute Gewicht des zu untersuchenden Körpers auf gewöhnliche Weise gefunden, so verwandelt man die Waage in eine hydrostatische, wozu an Stelle der einen Schale eine ebenso schwere, aber an kürzeren Fäden hängende Platte kommt, unten mit einem Häkchen versehen, woran man den Körper irgendwie so befestigen kann, dass er in ein untergestelltes Wassergefäss taucht. Hält ihm jetzt in der andern Waagschale das Gewicht  $y$  das Gleichgewicht, während beim Abwägen in der Luft  $x$  nöthig war, so ist  $x - y$  der Gewichtverlust des Körpers im Wasser oder das Gewicht eines gleichgrossen Volums Wasser, und steht  $x : x - y$

$$= sp : 1 \quad sp = \frac{x}{x - y} \text{ d. h., man findet das spezifische Ge-}$$

wicht eines Körpers, indem man sein Gewicht in der Luft durch seinen Gewichtverlust im Wasser dividirt. — Ist der Körper leichter als Wasser und sinkt also in demselben von selbst nicht unter, so wird er mit einem Uebergewicht  $p$  verbunden, mit welchem sein absolutes Gewicht  $x$  auf  $x + p$  steigt. Ergibt sich dann als Gesamtverlust im Wasser  $y$ , wovon nach besonderem Versuch auf das Uebergewicht  $q$  kommt, so ist  $y - q$  der wirkliche Gewicht-

verlust des fraglichen Körpers, mithin  $\frac{x}{y - q}$  sein spezifisches Gewicht,

worin  $x < y - q$ . — Schluckt der Körper Wasser an, so werden besondere Vorsichtsmaassregeln nöthig. Nachdem man sein absolutes Gewicht in der Luft und bei vollkommener Austrocknung  $= a$  fand, wird er so lang in Wasser gelegt, bis er soviel als möglich in sich verschluckt hat. In diesem angesogenen Zustand wieder in der Luft gewogen, gibt er  $b$ , hat also um  $c = b - a$  zugenommen. Unmittelbar nach der letzten Abwägung in Wasser gebracht, erleidet er laut der hydrostatischen oder Senkwaage einen Gewichtverlust  $d$ . Hiervon kommt aber  $c$  auf das in seinem Innern befindliche Wasser, so dass seine eigentliche Materie nur  $d - c$  verliert und sein spezifisches

Gewicht  $\frac{a}{d - c}$  ist. — Löst sich der gegebene Körper in Wasser,

so muss er in einer andern Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewicht gewogen werden. Fand man das absolute Gewicht eines Salzes  $= p$  und im Alkohol von der Dichte 0,866 zu  $q$ , so ist sein Verlust in diesem  $v = p - q$  und wäre im Wasser  $x : p - q = 1 :$

$$0,866 \quad x = \frac{p - q}{0,866}, \text{ denn offenbar steht der Gewichtverlust jedes}$$

Körpers in geradem Verhältniss zur Dichte der Flüssigkeit, in welcher



man ihn abwägt. Daraus erwächst sein spezifisches Gewicht

$$= \frac{0,866 p}{p - q}.$$

Die spezifische Gewichtbestimmung der Flüssigkeiten kann ausser der aräometrischen Methode auch so geschehen, dass man ein genau kalibriertes Fläschchen mit fest passendem Stöpsel von bekanntem absoluten Gewicht einmal mit Wasser und nach vollkommener Austrocknung mit der zu untersuchenden Flüssigkeit füllt und von den beidesmal gefundenen Gewichten das des Fläschchens abzieht. Hat man jetzt die absoluten Gewichte  $m$  und  $n$  gleicher Volumina des Wassers und der Flüssigkeit, so ist  $m : n = 1 : x$

$$x = \frac{n}{m}$$

die Dichte dieser.

Ueber die spezifischen Gewichte der Gase wird an passender Stelle das Nöthige nachgetragen.

Von folgenden Körpern:

|                       |                                |             |
|-----------------------|--------------------------------|-------------|
| Arsenik               | sind die spezifischen Gewichte | 5,672       |
| Gusseisen             | „ „ „                          | 7,207       |
| Schmiedeeisen         | „ „ „                          | 7,788       |
| Stahl                 | „ „ „                          | 7,816       |
| Gussstahl             | „ „ „                          | 7,919       |
| Kupfer                | „ „ „                          | 8,879       |
| Silber                | „ „ „                          | 10,511      |
| Blei                  | „ „ „                          | 11,352      |
| Quecksilber           | „ „ „                          | 13,598      |
| gefrornes Quecksilber | „ „ „                          | 15,612      |
| Gold                  | „ „ „                          | 19,362      |
| Platin                | „ „ „                          | 21,450      |
| Eis                   | „ „ „                          | 0,916       |
| Phosphor              | „ „ „                          | 1,770       |
| Kreide                | „ „ „                          | 1,800       |
| Schwefel              | „ „ „                          | 2,072       |
| Steinsalz             | „ „ „                          | 2,140—2,410 |
| Feuerstein            | „ „ „                          | 2,580—2,630 |
| Schiefer              | „ „ „                          | 2,670—3,500 |
| Alabaster             | „ „ „                          | 2,700       |
| Marmor                | „ „ „                          | 2,800       |
| Diamant               | „ „ „                          | 3,440—3,550 |
| Korkholz              | „ „ „                          | 0,240       |
| Pappel                | „ „ „                          | 0,391       |



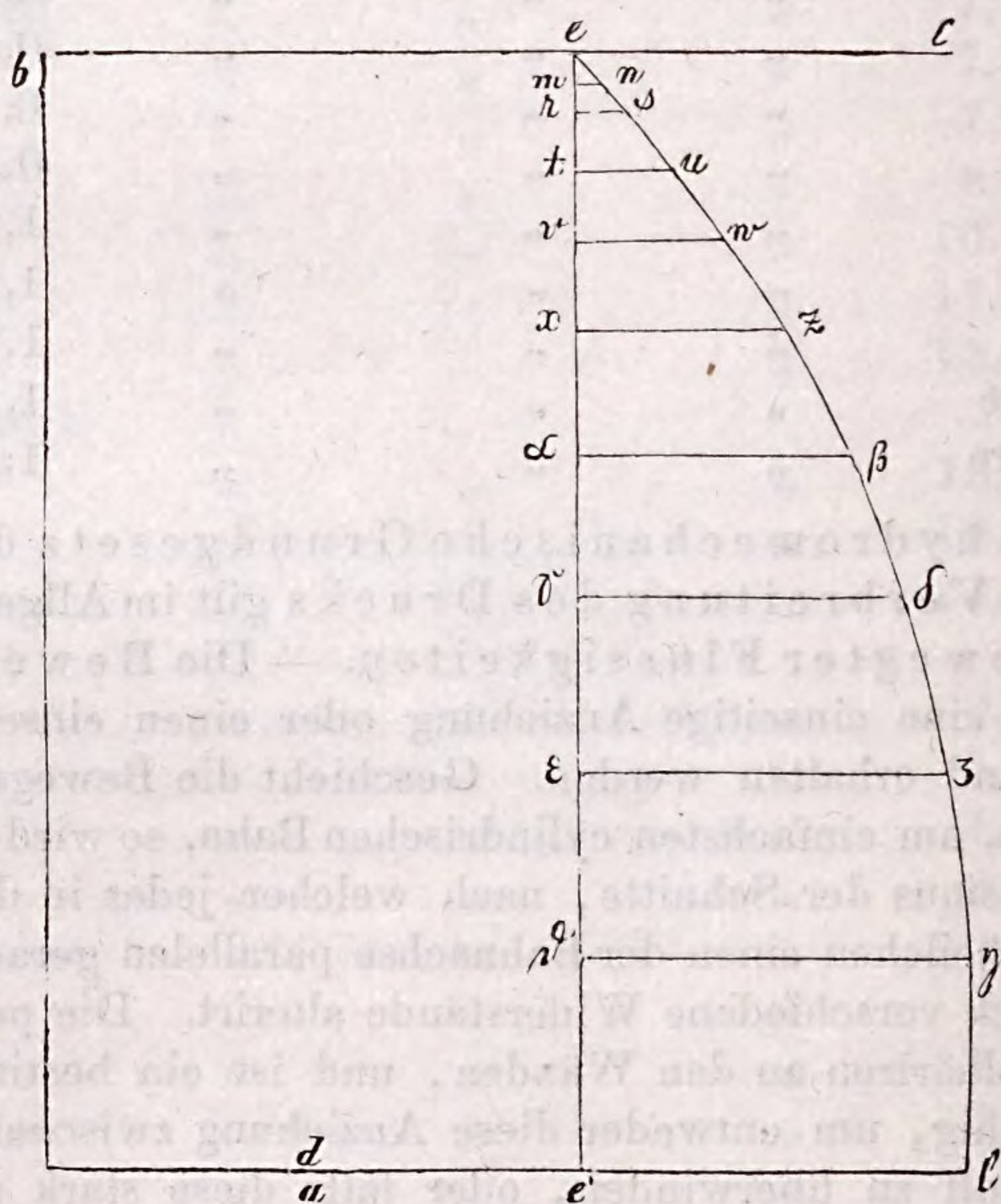
|               |                                |             |
|---------------|--------------------------------|-------------|
| Eiche         | sind die spezifischen Gewichte | 0,650       |
| Nussbaum      | „ „ „                          | 0,660       |
| Buche         | „ „ „                          | 0,750       |
| Ebenholz      | „ „ „                          | 1,187       |
| Holzkohle     | „ „ „                          | 0,280—0,441 |
| Kautschouk    | „ „ „                          | 0,934       |
| Butter        | „ „ „                          | 0,942       |
| Kampher       | „ „ „                          | 0,986       |
| Bernstein     | „ „ „                          | 1,075       |
| Asphalt       | „ „ „                          | 1,100       |
| Weizen        | „ „ „                          | 1,346       |
| Zucker        | „ „ „                          | 1,606       |
| Elfenbein     | „ „ „                          | 1,825       |
| Ziegelstein   | „ „ „                          | 1,411—2,210 |
| Porzellan     | „ „ „                          | 2,319       |
| Spiegelglas   | „ „ „                          | 2,370—2,560 |
| Aether        | „ „ „                          | 0,716       |
| Alkohol       | „ „ „                          | 0,792       |
| Terpentinöl   | „ „ „                          | 0,872       |
| Baumöl        | „ „ „                          | 0,919       |
| Burgunder     | „ „ „                          | 0,992       |
| Seewasser     | „ „ „                          | 1,027       |
| Madera        | „ „ „                          | 1,038       |
| Salzsäure     | „ „ „                          | 1,192       |
| Salpetersäure | „ „ „                          | 1,522       |
| Schwefelsäure | „ „ „                          | 1,845.      |

7. Das hydromechanische Grundgesetz der gleichmässigen Verbreitung des Drucks gilt im Allgemeinen auch innerhalb bewegter Flüssigkeiten. — Die Bewegung selbst muss durch eine einseitige Anziehung oder einen einseitigen Druck veranlasst und erhalten werden. Geschieht die Bewegung in einer geschlossenen, am einfachsten cylindrischen Bahn, so wird die Annahme des Parallelismus der Schnitte, nach welcher jedes in der Strömung begriffene Theilchen einen der Bahnachse parallelen geradlinigen Weg macht, durch verschiedene Widerstände alterirt. Die peripherischen Moleküle adhären an den Wänden, und ist ein bestimmter Kraftaufwand nöthig, um entweder diese Anziehung zwischen festem und flüssigem Stoff zu überwinden, oder falls diese stark genug wäre, ein ruhendes Ankleben der äussersten Schicht zu unterhalten, die Flüssigkeit selber zu zerreißen. Dieser Widerstand ist der Grösse der Wandfläche und der Strömungsgeschwindigkeit proportional. Ausserdem findet an den Wänden, welche nie idealglatt sind, Reibung



statt, welche ebenfalls von der Fläche und vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängt. Endlich liegt ein Widerstand in der Flüssigkeit selbst, welche nie die theoretisch vorausgesetzte absolute Verschiebbarkeit ihrer Theilchen, sondern vielmehr je nach mehr oder weniger ausgesprochener Molekularattraktion verschiedene Grade von Dick- und Düninflüssigkeit besitzt. Durch letztre Eigenschaft ist die, bei gewöhnlicher Temperatur jedoch erst unter einem Druck von 15 bis 16 Atmosphären tropfbar werdende Schwefelwasserstoffsäure ausgezeichnet. — Die Krümmung der Röhren oder deren Brechung in Winkeln setzt bei der stätig oder an bestimmten Punkten eintretenden Veränderung der Bewegungsrichtung einen die durchfliessende Menge sehr vermindern den Widerstand. — Im Allgemeinen wird die Strömungsgeschwindigkeit in eisernen Röhren der Länge  $l$  und des Durchmessers  $d$  unter dem Druck  $p$  nach der Formel  $26,79 \sqrt{\frac{dp}{l}}$  berechnet. — Erhöhte Temperatur vermehrt die Durchflussmenge. — In regelmässigen Kanälen fällt das Maximum der

Fig. 37.



Stromgeschwindigkeit in die Mitte der Oberfläche und beträgt diejenige der ganzen Masse 0,8 hiervon. — Auch konkurriren meist kleine unregelmässige Bewegungen im Innern der Flüssigkeit, deren



sich die Theorie noch nicht völlig bemeistert hat und die besonders merklich beim freien Ausfluss der Flüssigkeit werden.

8. Das an der Bodenöffnung befindliche Flüssigkeitstheilchen a, Fig. 37, dessen Volum  $\frac{1}{n}$  der ganzen Druckhöhe betragen mag, steht unter dem vollen Druck dieser und ertheilt ihm folglich, wenn es von a ab zu fallen oder auszufließen beginnt, die Schwere ein Maass der Beschleunigung, welches n mal grösser ist, als wenn es nicht unter dem sein eigenes Gewicht n fach übersteigendem Druck stünde. Setzen wir die kleine Strecke  $ad = \frac{1}{n} ab$ , so gewinnt das unter dem Druck  $ng$  stehende Wassermolekul am Ende des Weges  $ad$  die Geschwindigkeit  $\sqrt{2 \cdot ng \cdot ad} = \sqrt{2g \cdot ab}$  d. h., die Ausflussgeschwindigkeit ist gleich der Endgeschwindigkeit eines vom Spiegel der Flüssigkeit zur Ausflussöffnung frei herabgefallenen Körpers. Daraus folgt, dass die Ausflussgeschwindigkeit — wie der freie Fall der Körper — gar nicht von der Natur der Flüssigkeit, wohl aber von der Quadratwurzel der Druckhöhe abhängt. Wird deshalb eine gleichbleibende Geschwindigkeit gewünscht, so muss der Flüssigkeitsspiegel immer gleich hoch erhalten bleiben, sonst sinken bald die horizontalen Wasserschichten mit sehr beschleunigter Geschwindigkeit herab und bildet sich in der Nähe der Ausflussöffnung eine wirbelnde Bewegung, im Strahl selbst aber eine trichterförmige Vertiefung. Die Ausflusslinie an einer Seitenöffnung findet man durch folgende Betrachtung. Wegen allseitiger Gleichheit des Drucks ist die Ausflussgeschwindigkeit an einer Seitenöffnung, welche  $h$  Meter unter dem Spiegel liegt,  $\sqrt{2gh}$ . Liegt  $e$  demselben sehr nah, z. B. 1 Decimeter tief, so wird der Weg einer Sekunde  $c = el = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,1} = 1,4^m$ . In dieser Sekunde, in welcher das Wassertheilchen  $e$  vermöge der soeben berechneten Ausflussgeschwindigkeit den Weg  $el = 1,4^m$  machen würde, fällt es vermöge der Schwere um  $ee' = 4,9^m$  senkrecht gegen die Erde. Zerlegen wir diese Zeit in 10 Momente, so erwachsen für 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 Sekunde beziehungsweise die horizontalen Sprungweiten  $mn = 0,14$   $rs = 0,28$   $tu = 0,42$   $vw = 0,56$   $xz = 0,70$ ,  $\alpha\beta = 0,84$   $\gamma\delta = 0,98$   $\epsilon\zeta = 1,12$   $\vartheta\eta = 1,26$   $e'l' = 1,4^m$  und die diesen Zeiten entsprechenden verticalen Fallräume  $em = 0,049$   $er = 0,196$   $et = 0,441$   $ev = 0,784$   $ex = 1,225$   $e\alpha = 1,764$   $e\gamma = 2,401$   $e\epsilon = 3,136$   $e\vartheta = 3,969$   $ee' = 4,9$

und es verhalten sich die Abscissen  $em$   $er$   $et$  ... wie die Quadrate



der Ordinaten  $mn$ ,  $rs$ ,  $tu\dots$ , die Ausflusslinie  $ensuwz\beta\delta\zeta\eta l'$  ist demnach eine Parabel.

Die Menge der in bestimmter Zeit ausströmenden Flüssigkeit hängt von der Stromgeschwindigkeit  $\sqrt{2gh}$  und dem Flächeninhalt der Oeffnung  $o$  ab und wäre theoretisch gleich dem Kubikinhalt eines Cylinders von der Grundfläche  $o$  und der Höhe  $\sqrt{2gh}$ . Versuche ergeben jedoch nie die berechnete Menge, sondern nur 0,621 bis 0,645 derselben. Diese Verminderung der Ausflussmenge hat darin seinen Grund, dass nur in der Mitte der Oeffnung und in der Achse des Strahles eine nach Grösse und Konstanz der theoretischen Annahme entsprechende Geschwindigkeit herrscht, an den Rändern der Mündung aber eine nicht unbeträchtlich verminderte, weil hier Adhäsion zu überwinden ist und weil durch die seitlich herbeifliessenden Wassertheilchen eine Ablenkung der geradlinigfallenden statthat. Die Abweichungen der Erscheinung von der Theorie führen auch zu Modifikationen in der Gestalt des Strahles, welche man unter der Bezeichnung: Zusammenziehung des Strahles, *contractio venae*, zusammenfasst. Der Strahl besteht eigentlich aus einzelnen Tropfen, deren jeder periodischen Anschwellungen nach der Breite und dann nach der Länge ausgesetzt ist, wodurch abwechselnde Ausbuchtungen und Einschnürungen um die Strahlenachse auftreten. Diese Schwingungen der Wassertropfen sind manchmal stark und schnell genug, um der Luft sich mittheilend einen schwachen Ton zu erzeugen, wie umgekehrt mittels eines in der Nähe erzeugten Tones die Geschwindigkeit der Schwingungen und hiermit die Länge der peripherischen Bäuche des Strahls willkürlich verändert werden kann. — Anderweite Formeigenthümlichkeiten hängen von der Gestalt der Mündung ab und fallen namentlich auf, wenn diese eckig ist. Magnus erklärt alle Beobachtungen dieser Art aus dem Zusammentreffen zweier Strahlen unter verschiedenen Winkeln. Auch konstatirt dieser Forscher in seinen hydraulischen Untersuchungen, dass, wenn die Rotation der Flüssigkeit im Innern des Gefässes durch eigenthümliche Vorrichtungen gedämpft ist, und von Aussen jede Erregung von Schwingungen vermieden wird, der Strahl keine Bäuche zeigt, sondern eine zusammenhängende glatte Masse darstellt, welche erst dann trüb wird, wenn er nach stätiger Abnahme seines Querschnitts in gewisser Entfernung von der Oeffnung anfängt, seine Continuität zu verlieren. — Die Entstehung der Bäuche leitet er von den Schwingungen der Ränder der Ausflussöffnung ab und glaubt, dass die unmittelbare Mittheilung von Luftvibrationen für die Gestalt des Strahls von sehr untergeordneter Bedeutung sei. Wahrscheinlich vibriert nicht der Rand der Mündung allein, sondern die ganze Bodenplatte, in



welchem Fall auch die darüber stehende Wassermasse sich an der Bewegung betheiligen wird. Die Bildung der Bäuche macht Magnus ausserdem abhängig von der Regelmässigkeit der Trennung der herabfallenden Wassersäule in gleichgrosse Tropfen, von den gleichen Zeitintervallen zwischen je zwei Tropfenbildungen und von Einhaltung der nämlichen Stelle bei der Lostrennung; denn auch in einem Strahl, welcher keine Bäuche zeigt, trennen sich Wassermassen, welche vibriren, aber alle Theile des Vorgang sind hierbei unregelmässig. Eben dieses regelmässige Abreissen und Schwingen der Wassermassen aber wird bedingt durch die obengemeldeten Schwingungen der Bodenplatte oder des Randes der Ausflussmündung. — Auf Annäherung eines cylindrischen Körpers an einen Bauch, wird dieser in sehr unregelmässiger Weise abgelenkt, während die innre Achse des Strahls den geradlinigen Weg ungestört fortsetzt. — Ein Strahl ohne Bäuche wird von einem genäherten elektrischen Körper abgelenkt. — In einem mit Bäuchen versehenen Strahl bleiben diese in der Nähe des elektrisirten Stabes in Richtung und Grösse unverändert, aber der Axenfaden wird abgelenkt; ausserdem sprühen hie und da einzelne sehr feine Fäden aus den Bäuchen hervor. — Strahlen, welche aus eckigen Oeffnungen kommen, zeigen zwar keine Bäuche, aber die auch ihnen nicht fehlenden unregelmässigen Tropfenbildungen werden bezüglich der Entfernung ihrer Bildungsstelle von der Mündung durch die Schwingungen des Randes dieser und der Bodenplatte beeinflusst. — Bei seitlich schiefer oder horizontalem Ausfluss entstehen gern Theilungen oder garbenähnliche Ausbreitungen des Strahles. — Zwei Wasserstrahlen gleichen Durchmessers und Druckes, welche in entgegengesetzter Richtung zusammenstossen, bilden eine durchsichtige Kreisscheibe, auf welcher in regelmässigen Abständen radiale Strahlen sich zusammenziehen. —

Von grossem Einfluss auf die Ausflussmengen ist der Gebrauch der kegelförmigen Ansatzröhren. Bei Anwendung einer solchen von 11''' Länge, 14,5''' Durchmesser am engren, 18''' am weiteren Ende wurde  $\frac{30}{31}$  der berechneten Ausflussmenge erzielt.

Noch günstiger stellt sich das Verhältniss, wenn die sich konisch verengende Röhre durch eine zweite nach Aussen sich erweiternde verlängert wird. Hierbei scheint in letztrer das durchfliessende Wasser dieselbe Geschwindigkeit anzunehmen, als an der engsten Stelle des Zusammenstosses beider Röhren. Weil es aber jetzt einen grösseren Querschnitt zu durchströmen hat, würde bei gleichbleibender Geschwindigkeit die momentane Bildung eines luftleeren Raumes erfolgen, welchen aufzuheben, die hinteren Wasserschichten mit vermehrter Geschwindigkeit nachstürzen.



Findet die Seitenausströmung durch eine weitausgedehnte Fläche statt, welche in verschiedenen Tiefen abweichende Druckgrößen darbietet, so wird letztere in jeder beliebigen Tiefe  $x$  durch  $\sqrt{2gx}$  ausgedrückt. Hat man die Druckgrößen in den Tiefen  $h$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , beziehungsweise durch die zur Fläche Senkrechten vom Maasse  $n$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ , ausgedrückt, so steht  $n = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ ,  $n_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}$ , woraus hervorgeht, dass, wenn  $H$  die Höhe der Ausströmungsfläche und  $N$  die dem untersten Punkt entsprechende Druckgrösse ist, die den Endpunkt der letzten Senkrechten mit dem obersten Punkt der Höhe verbindende Kurve eine Parabelfläche vom Inhalt  $\frac{2}{3} H \sqrt{2g \cdot H}$  abschneidet. Diese Formel mit der Breite der Oeffnung multiplicirt, gibt die theoretische und, je nachdem von zwei, drei oder vier Seiten Contraction stattfindet, mit den Coëfficienten 0,697 0,664 0,642 0,620 vervielfacht, die wirkliche Durchflussmenge.

9. Die Wirkungsfähigkeit einer bewegten Wassermasse hängt von ihrem Gewicht und dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit ab  $= \frac{p c^2}{2g}$ .

Das mechanische Moment eines Wassergefälls bestimmt man durch das Produkt der in einer fixirten Zeiteinheit herabfallenden Wassermasse vom Gewicht  $p$  und der Fallhöhe  $h$ . Weil aber letztere laut den Fallgesetzen  $= \frac{c^2}{2g}$ , so wird  $p \cdot h = \frac{c^2}{2g} p$  wie oben.

Gewicht oder Stoss bewegter Wassermassen wird an den verticalen Wasserrädern benutzt, deren man unterschlägige, überschlägige, mittelschlägige kennt. An den erstren sind die am Radumfang vorstehenden Schaufeln geradlinige Verlängerungen der Radien. Das heranfliessende Wasser theilt den eintauchenden unteren Schaufeln eine Geschwindigkeit mit, welche ein Maximum wird, wenn das Wasser seine ganze Bewegungsgrösse auf das unbelastete, keinen Widerstand leistende Rad übertrüge, und ein Minimum, nämlich Null, wenn der Widerstand des Rades die Geschwindigkeit des Wassers ganz aufhebt. In beiden Fällen wird kein Nutzeffekt erzielt; vielmehr gewinnt man denselben vortheilhaftest, wenn von der Wassergeschwindigkeit die Hälfte auf das Rad als Rotationsschnelligkeit übergeht. Wird auf diese Weise schon theoretisch nur die Hälfte des mechanischen Moments der bewegten Flüssigkeit als



verwendbare Arbeit gewonnen, so sinkt in Wirklichkeit wegen mancherlei Widerstände der Nutzen auf  $0,3 \frac{p c^2}{2 g}$  herab.

Machen die Schaufeln, wie am Poncelet'schen Rad, spitze Winkel mit der radialen Richtung, oder sind dieselben gekrümmt, so fliesst das Wasser auf den Schaufelflächen hinauf und gibt während dieser längeren Berührung einen soviel grösseren Theil seiner Geschwindigkeit ab, dass  $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{3}{4}$  des berechneten Nutzeffektes erreicht wird. Verlaufen die Schaufeln am Radumfang in der Tangentialrichtung, so würde zwar das Maximum der Geschwindigkeitsübertragung erzielt, aber einmal wären dem Wiederaustritt des Wassers grosse Schwierigkeiten bereitet, und dann verlöre dasselbe soviel von seiner Geschwindigkeit, dass der Abfluss gefährdet wäre.

Nennt man die Stromgeschwindigkeit  $c$  und die von der gestossenen Fläche angenommene  $v$ , so behält das Wasser in der direkten Richtung des Strahles die letztere, fliesst aber seitlich mit der Geschwindigkeit  $c - v$  ab und hat daher im Ganzen die

Wirkungsfähigkeit  $\frac{m}{2} (c - v)^2 + \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} [(c - v)^2 + v^2]$ , worin  $(c - v)^2 + v^2 = v'^2$  (dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welchem das Wasser nach gethaner Arbeit weiterfliesst).

Das Gewicht der in einer Sekunde zum Stoss kommenden Wassermasse ist aber offenbar gleich dem Querschnitt  $q$  mal der Geschwindigkeit  $c$ , wonach  $\frac{m}{2} = \frac{q c}{2 g}$  wird und ihm nach

obiger Formel die Wirkungsfähigkeit  $\frac{q \cdot c}{2 g} v'^2$  bleibt; weil

seine ursprüngliche Wirkungsfähigkeit  $\frac{q c}{2 g} c^2$  war, so

geschah am Rad die Arbeit  $\frac{q c}{2 g} (c^2 - v'^2) = \frac{q c}{2 g} (c^2 - c^2$

$+ 2 c v - v^2 - v^2) = \frac{q c}{2 g} [2 v (c - v)] = \frac{q c v (c - v)}{g}$ . Dieser

Werth, welcher abgesehen von der dargebotenen Wasserkraft mit der auf das Rad übertragenen Geschwindigkeit  $v$  variirt, zeigt deutlich, dass aller Nutzeffekt verschwindet, wenn die ganze Wassergeschwindigkeit auf das Rad übertragen würde, denn für  $c = v$  wird

$\frac{q c v (c - v)}{g} = 0$  und erreicht sein Maximum für  $v = \frac{c}{2}$ , nämlich

$q c v \cdot \frac{c - v}{g} = \frac{q \cdot c \cdot c \cdot c}{2 \cdot 2 \cdot g} = \frac{q \cdot c \cdot c^2}{4 g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m c^2}{2}$ , wo-



nach, wie oben bereits erwähnt, höchstens die Hälfte der lebendigen Wasserkraft zur wirklichen Verwendung kommt.

Sind die unterschlägigen Räder vortheilhaft, wo man grosse Wassermengen aber geringes Gefäll zur Verfügung hat, so empfehlen sich die überschlägigen für das umgekehrte Verhältniss, wie es namentlich kleinen Gebirgsbächen eigen ist. Die nach oben offenen Zellen der einen Seite werden mit dem von oben herab- und darüberfliessenden Wasser gefüllt, sinken jetzt vermöge ihrer Schwere und bringen das Rad zur Drehung, deren Bestand dadurch gesichert ist, dass die gefüllten Zellen auf der andern Seite mit der Mündung nach unten gekehrt auslaufen, und abwechselnd neue zur Füllung vorrücken. Weil der Ausfluss beginnt, bevor die Zellen den tiefsten Punkt im Verlauf der Rotation erreicht haben, so wird höchstens 75 Proc., oder bei sehr hohen 83 Proc. des theoretischen Nutzeffektes erzielt. Derselbe ist aus zwei Summanden gebildet. Erstlich wirkt die Schwere des in die Zellen aufgenommenen Wassers. Die daraus hervorgehende Druckwirkung wird gemessen durch das Produkt der Wassermenge einer Zelle in die Anzahl der wasserhaltenden Zellen oder, wie man den letztern Faktor auszudrücken pflegt, in die Höhe des wasserhaltenden Bogen. Zweitens überträgt das mit der Bewegungsgrösse  $mc$  ankommende Wasser einen Theil derselben durch den Stoss auf das Rad. Nimmt dieses die Geschwindigkeit  $v$  an und ist  $q$  die Wassermenge einer Zelle, so hängt die in einer Sekunde wirklich zum Stoss kommende Wassermenge offenbar davon ab, wie oft  $q$  oder vielmehr eine immer erneute, dem  $q$  gleiche Wassermasse auf das Rad stossen kann, und dies wird bestimmt durch die Differenz der Geschwindigkeiten von Wasser und Rad. Demgemäss ist  $\frac{q \cdot (c - v)}{g}$  die Masse der in einer Sekunde wirksamen Wassermasse und da mit ihr das Rad die Geschwindigkeit  $v$  übernimmt, so wurde die Bewegungsgrösse  $\frac{q \cdot (c - v) \cdot v}{g}$  übertragen, im Ganzen also  $qh + \frac{q(c - v) \cdot v}{g} = q \left( h + \frac{v}{g} (c - v) \right)$  gewonnen. — Dabei ist zu beachten, dass zu grosse Raschheit der Umdrehung die Wirkung schmälert, weil die mit der Rotations-schnelligkeit im Quadratverhältniss wachsende Centrifugalkraft das Wasser zu früh aus den Zellen schleudert.

An den mittelschlägigen Rädern tritt das Wasser ungefähr in der Mitte der Radhöhe ein und liefert bei 1—5<sup>m</sup> Gefäll höchstens die Hälfte der berechneten Wirkung. Durch den sogenannten Kropf, welcher den arbeitenden Wasserbogen des Rades in



einem geschlossenen Raum zusammenhält, soll dies auf  $\frac{3}{4}$  gesteigert werden.

Gefälle über 16 Meter lassen kaum mehr die überschlägigen Räder zu. Hier wie auch bei kleineren Gefällen an Stelle der unterschlägigen Räder erweisen sich horizontale Wasserräder (Turbinen) vortrefflich. — Die Turbine arbeitet als Stossrad, wenn gegen die an der Peripherie eines horizontalen Rades befestigten Schaufeln der aus einem pyramidalzugespitzten Gerinn ablaufende Wasserstrahl fast senkrecht stösst. Der theoretische Effekt ist die Hälfte der lebendigen Wasserkraft, und auch hiervon kommen höchstens 75 Proc. zur Verwendung. Vortheilhafter wirkt die Turbine als Druckrad, an welchem auf die muschelförmig gekrümmten Radschaufeln das Wasser so geleitet wird, dass es, allmählig seine Geschwindigkeit verlierend, ohne eigentlichen Stoss nur einen stätigen Druck übt. In den Centrifugalturbinen endlich fliesst das Wasser von der Peripherie her zwischen die gekrümmten Schaufeln hinein, gibt, einen Druck ausübend, seine Geschwindigkeit an sie ab und ergiesst sich dann nach unten. Complizirter und deshalb hier kaum zur Erörterung geeignet sind die mit Leitkurven und gekrümmten Schaufeln versehenen Turbinen nach Fourneyron, Gadiat, Jouvials.

Ein mit Wasser gefülltes Gefäss, welches senkrecht herabhängt, ist in vollkommenem Gleichgewicht, weil die darin enthaltene Flüssigkeit nach allen Seiten den gleichen Druck übt. Wird aber plötzlich an der einen Seite eine Oeffnung gemacht, durch welche das Wasser ausfliesst, so hört ebendamt der diesseitige Druck auf und bewirkt der jetzt einseitig gewordene Druck an der andern Seite eine Bewegung der ganzen Masse in der der Ausströmung entgegengesetzten Richtung. Diese Wirkungsform, bei welcher im Allgemeinen durch den Ausfluss von Wasser eine der Ausflussrichtung entgegengesetzte Bewegung erzielt wird, bezeichnet man als die Folge der freiwerdenden Reaktionskraft, und bringt dieselbe in den Reaktionsturbinen zur Verwendung; das hierher gehörige Segner'sche Wasserrad besteht aus einem hohlen verticalen Cylinder, welcher sich mit möglichst geringer Reibung um seine Verticalachse dreht. Unten gehen von ihm zwei in eine horizontale Linie fallende Arme ab, in welche je eine entgegengesetzt gerichtete Oeffnung gebohrt ist, aus denen das von oben in den Cylinder eintretende Wasser abfliesst. Ist die Oeffnung des links stehenden Armes nach vorn gerichtet, so bewirkt der Rückstoss des von links nach vorn ausströmenden Wassers eine Drehung des Apparats von links über hinten nach rechts. Gleichzeitig fliesst aber aus der am rechten Arm nach hinten gewendeten Oeffnung Wasser von rechts



nach hinten, wonach die hier freiwerdende Reaktion eine Drehung von rechts über vorn nach links einleitet. Offenbar gehen die beiden so hervorgebrachten Drehungen in demselben Sinn und kann mittels dieser gleichgerichteten, irgendwie übertragbaren Bewegung eine Arbeit gethan werden. — Weil in diesem Apparat durch das Gewicht des Wassers der Bewegung ein beträchtlicher Widerstand aufgebürdet wird, brachte Althans die Verbesserung an, dass das Wasser von unten in die horizontalen Arme gelangt. Die horizontalen Arme können auch gekrümmt sein. Ebenfalls auf die Reaktion gründen sich die schottischen Turbinen.

Obschon die Besprechung besonderer hydraulischer Apparate nicht angezeigt ist, möge schliesslich in kurzen Worten der archimedischen Wasserschraube gedacht werden. Sie besteht aus einer um einen Cylinder schraubenförmig gewundenen Röhre, deren untere Oeffnung unter Wasser liegt, während die Cylinderachse mit der Senkrechten einen grösseren Winkel macht, als die Grundfläche des Cylinders mit der Tangente irgend eines Punktes der Schraubenlinie. Nachdem das Wasser zur untren Mündung eingetreten ist, wird der ganze Apparat um die Cylinderachse so gedreht, dass die weiter aufwärts gelegenen Punkte der Schraubenlinie successive tiefer zu liegen kommen, als die zunächst nach unten vorhergehenden, so dass scheinbar der Schwere entgegen, aber im Wesentlichen gerade nach ihren Gesetzen ein allmähliges Steigen des Wassers bis zur Ausflussmündung statthat. Die Mündung muss beim Verlassen des Wasserspiegels einen Punkt einnehmen, welchen man den Scheitel des durch eine Tangente an zwei gleichnamige Punkte derselben Schraubenwindung gefundenen wasserhaltenden Bogens heisst, unterhalb dessen das Wasser bei Stillstand der Schraube den tieferen Windungen zuflösse.

### Beispiele.

1. Ein Gefäss von der Form eines abgestumpften Kegels hat eine Bodenfläche von 15 Quadratcentim., während der Querschnitt der oberen Oeffnung 10 Quadratcentim., die Höhe 12 Centim. misst. Wie gross ist der Bodendruck bei Anfüllung mit Wasser und um wie viel übersteigt er das Gewicht der Wassermasse?

Druck =  $15 \cdot 12 = 180$  Gramm.

Gewicht =  $\frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}) = 4 (25 + \sqrt{150}) = 148,8$  Gr.

$d = 180 - 148,8 = 31,2$  Gr.

2. Die beiden Schenkel einer knieförmigen gleichweiten, oben offenen Röhre enthalten Quecksilber mit gleichem Niveau. Wie hoch



muss die Wassersäule sein, welche in dem einen Schenkel nachzufüllen ist, damit das Quecksilber im andern um 3'' steige?

$$3 \cdot 13,598 = 40,794''.$$

3. Welchen Druck erleidet eine über den kurzen Schenkel eines anatomischen Heber gebundene Blase, wenn dieser Schenkel einen Radius von 9 Centim. hat und das Wasser im engen Schenkel 7 Decim. über der Ebene der Blase steht?

$$9^2 \cdot 3,4151 \cdot 70 = 17,7408 \text{ Kilogr.}$$

4. Welcher Druck wird vom Presskolben einer Bramah'schen Presse geübt, wenn dessen Durchmesser 20 mal so gross ist, als derjenige des Pumpkolbens, und die Kraft mit 50 Pfd. Druck vom Unterstützungspunkt des Pumphebels 30'', der Saugkolben jedoch nur 3'' davon entfernt ist?

$$50 \cdot 30 = 3 \cdot x \quad x = 500 \text{ Pfd. Druck im Pumprohr}$$

$$20^2 \cdot 500 = 200000 \text{ Pfd. Druck des Presskolben.}$$

5. Spezifische Gewichtsbestimmung des Steinsalzes.

Absolutes Gewicht eines gegebenen Stücks

in der Luft 100 Gr.

in Alkohol 62,991 Gr.

Gewichtverlust „ „ 37,009 Gr.

Dichte des „ „ 0,792

$$0,792 : 1 = 37,009 : n$$

$$n = 46,729 \text{ Gewichtverlust in Wasser}$$

$$x = \frac{100}{46,729} = 2,14.$$

6. Ein Mann hebt im Wasser einen Stein von 1<sup>c</sup> Inhalt und 2,5 Dichte bis an die Oberfläche, ohne ihn über diese emporbringen zu können. Wie viel könnte er, wenn die erzählte Leistung als Maass seiner Kraft gilt, in der Luft heben?

$$2,5 \cdot 66 - 66 = 99.$$

7. Welches Gewicht muss ein Schwimmpanzer aus Kork haben, um einen Menschen vom spezifischen Gewicht 1,1 (wahrscheinlich nur 1,066) und 130 Pfd. absolutem Gewicht im Wasser zu tragen?

Gewicht von 1<sup>c</sup> des Menschen  $1,1 \cdot 66 = 72,6$  Pfd., wenn 1<sup>c</sup> Wasser zu 66 Pfd. gerechnet wird.

$$\text{Volumen des Menschen } \frac{130}{72,6} = 1,791^c$$

$$\text{Verlust „ „ im Wasser } 1,791 \cdot 66 = 118,206 \text{ Pfd.}$$

$$\text{Sein Gewicht im Wasser } 130 - 118,206 = 11,794 \text{ Pfd.}$$

$$\text{Gewicht von 1<sup>c</sup> Kork} = 0,24 \cdot 66 = 15,84 \text{ Pfd.}$$

$$\text{Auftrieb} = 66 - 15,84 = 50,16 \text{ Pfd.}$$



$50,16 : 1^c = 11,794 : x^c \quad x = \frac{11,794}{50,16} = 0,235^c$  Volum des Korks zur verlangten Leistung.

$0,235 \cdot 66 \cdot 0,24 = 3,7224$  Pfd. Gewicht des Korkpanzer.

8. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus dem Boden eines Cylinders, in welchem es 2' hoch steht, während auf den Spiegel ein Kolben mit 6 Pfd. auf den Quadratzoll drückt?

Kolbendruck = Wassersäule von 1 Quadr. Querschnitt und 6 Pfd. Gewicht oder = „ „ „  $\frac{6 \cdot 144}{66} =$

$13 \frac{1'}{11}$  Höhe

Gesamtdruckhöhe  $2 + 13 \frac{1}{11} = 15 \frac{1}{11}$

Geschwindigkeit =  $\sqrt{2 \cdot 31,25 \cdot 15,091} = 30,711'$ .

9. Die Schützöffnung eines Mühlengerinns ist 0,5' hoch, 3' breit, und der Wasserspiegel steht 3,5' über der Rinnssole. Wie viel Wasser fließt stündlich durch?

$$\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 30 \cdot \frac{7}{2}} = 14,5$$

$$3600 \cdot 0,697 \cdot 14,5 = 36383,4^c.$$

10. Wie hoch kann man mittels einer Wassersäulenmaschine mit 140' Aufschlagwasser bei 70 Proc. reinem Nutzeffekt Salzsole heben, wenn der obere Kolben 20', der untere 10' Durchmesser hat?

$$140 : x = 10^2 : 20^2$$

$$1 : 4$$

$x = 560'$  Wasserhubhöhe theoretisch

$$\frac{560 \cdot 70}{100} = 392'$$

„ wirklich

Dichte der Salzsole = 1,149

$$392 : 1,149 = 341,2 \text{ Hubhöhe der Salzsole.}$$

## VII.

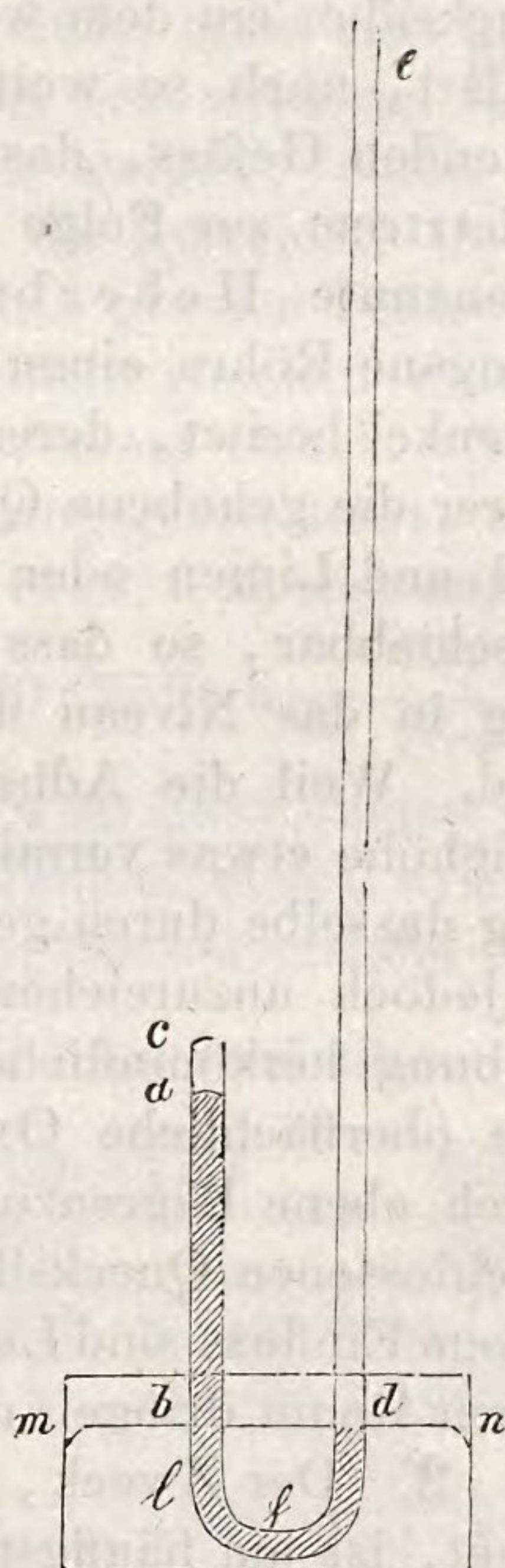
### Die Gase.

1. Die Erfahrung, dass eine Glaskugel, aus welcher man die Luft vertrieb, leichter ist, als im luftgefüllten Zustand, beweist, dass die Luft ein schwerer Körper sei. Dieser unmittelbare Beweis



war freilich erst möglich, nachdem man verstand, luftleere Räume herzustellen, vorher aber hatte man sich bereits von der Thatsache durch den Druck überzeugt, welchen die Luft als schwerer zugleich aber elastischflüssiger Stoff nach allen Richtungen übt. Nachdem Galilei 1640 die Idee des Luftdruckes zuerst ausgesprochen hatte, verfolgte Torizelli die wichtige Angelegenheit experimentell weiter. Eine einerseits geschlossene Glasröhre wird, völlig mit Quecksilber gefüllt, mit dem offenen während der Operation durch eine Glasplatte oder den Finger verschlossenen Ende so unter Quecksilber umgestürzt, dass keine Luft von Aussen eindringt. Man sieht, dass, genügende etwa  $2\frac{1}{2}$  Fuss betragende Länge der Röhre vorausgesetzt, ein Theil des Quecksilbers herabsinkt, eine Säule desselben aber in der Röhre stehen bleibt, deren Höhe über dem äusseren freien Quecksilberspiegel einstweilen zu 28'' oder 76 Centimeter angenommen werden mag. Der Querschnitt b der Röhre erleidet den Druck der Quecksilbersäule ab, muss deshalb, wenn er in Ruhe verbleiben soll, einen gleichen Druck von der andern Seite her erfahren. Statt die Röhre bei l mit offener Mündung unter dem Quecksilberspiegel mn enden zu lassen, kann unbeschadet des Wesens der Erscheinung sie in gleicher Weite mit der Krümmung bfd das Quecksilber des Gefässes mn durchsetzend, dann in der Richtung de ins Unendliche aufsteigend gedacht werden. Dann liegt ein kommunizirendes Röhrensystem vor, in welchem die Quecksilbermasse bfd durch sich selbst im Gleichgewicht steht, sonach der der Säule ab das Gleichgewicht haltende Druck in d statthat und von der Luftsäule besorgt wird, welche den gleichen Durchmesser mit lc und die Höhe der Atmosphäre hat. Misst der Querschnitt der Röhre 1 Quadratcentim., so hat die Quecksilbersäule ab den Kubikinhalt 76 K.-Centim. und das Gewicht  $13,59 \cdot 76 = 1032,84$  Gr. = 1,03284 Kilogr., wonach der durch die Luftsäule de ... dargestellte Luftdruck auf ein Quadratcentimeter Fläche nahezu ein Kilogramm macht. Eine Quadratmeterfläche wird demnach mit 10328,4 Kilogr. oder rund 20660 Pfd. gedrückt; rechnet man die Erdoberfläche zu 9282000 Quadratmeilen, die Quadratmeile zu 484 Million Quadratfuss und 1 Quadratmeter zu 10

Fig. 38.





Quadratfuss, so ergibt sich daraus der Druck der gesammten Luft auf die Erdoberfläche in runder Zahl zu mehr als  $4\frac{1}{2}$  Trillion Kilogr.; der Mensch aber, dessen Körperoberfläche durchschnittlich einem Quadratmeter gleicht, erträgt einen Luftdruck von mehr als 20000 Pfund.

Jede andre Flüssigkeit an der Stelle von Quecksilber in derselben Art behandelt, würde in einer vom Luftdruck getragenen Säule schweben, deren Höhe zu der des Quecksilbers in umgekehrtem Verhältniss der Dichte steht. So steigt Wasser  $13,59 \cdot 0,76 = 10,43$  Meter (nah 32') hoch, Alkohol 13,041 Meter.

2. Die mittleren Höhen des Quecksilberstandes wechseln nach Zeit und Ort, und bedarf man bei der Bedeutung dieses Umstandes für die Witterungsverhältnisse eines besondern Instrumentes zu genaueren Beobachtungen, welches Barometer heisst und für dessen wesentliche Einrichtung auf obigen Fundamentalversuch zurückgewiesen werden muss. Die Röhre darf weder so eng sein, dass die Molekularbeziehung zwischen Glas und Quecksilber ein dem wahren Sachverhalt entsprechendes Steigen verhindert, noch so weit im Verhältniss zu dem das freie Quecksilber haltenden Gefäss, dass ein Sinken in ersterer ein merkliches Steigen in letzterem zur Folge hätte. Dieser Gefahr entgeht am besten das sogenannte Heberbarometer, dessen gleichweite knieförmig-gebogene Röhre einen längeren geschlossenen und kürzeren offenen Schenkel besitzt, deren letzterer die drückende Luft zulässt, während ersterer die gehobene Quecksilbersäule umgibt. Die Skala, welche in Zoll und Linien oder in Centimeter und Millimeter getheilt ist, ist verschiebbar, so dass ihr Nullpunkt vor der jedesmaligen Beobachtung in das Niveau des untren freien Quecksilberspiegels gebracht wird. Weil die Adhäsion des Quecksilbers an die Glaswände die Steighöhe etwas vermindern könnte, so pflegt man vor der Beobachtung dasselbe durch gelindes Klopfen an der Röhre zu befreien. Dies ist jedoch unzureichend, wenn bei dem zur vollständigen Luftvertreibung herkömmlichen Kochen des Quecksilbers in der Röhre sich eine oberflächliche Oxydation einschlich, deren adhäsiver Einfluss durch ebene Begrenzung der sonst von einer konvexen Kuppe abgeschlossenen Quecksilbersäule bemerklich wird. Von noch schlimmerem Einfluss sind Luftblasen, welche mitunter in den Torizelli'schen leeren Raum dringen und das Quecksilber herunterpressen.

3. Der Zweck, welchem das Barometer seine Aufstellung dankt, ist am häufigsten: Vorhersagung der Witterung. Wenn aber auch Wärmevertheilung und atmosphärische Feuchtigkeit mit den Windrichtungen und dem Luftdruck entschieden zusammenhängen, wie denn in Westeuropa bei südwestlichen Winden das Quecksilber fast regelmässig fällt, wie man ferner ver-



muthen darf, dass das Fallen vor eintretendem Regenwetter von einer Abnahme der Elastizität des in der Atmosphäre verbreiteten Wassergases, welche zur tropfbaren Ausscheidung hinneigt, herrührt, wie endlich nahende Stürme immer von einem höchst auffälligen Sinken des Barometers eingeleitet werden, so hängt doch ungemein viel von Lokalverhältnissen und zufälligen der Berechnung entzogenen Umständen ab, in wie weit man sich auf die barometrischen Angaben bezüglich des Wetters verlassen darf.

4. Von ungleich höherem Werth sind die barometrischen Höhenmessungen. Bei allenthalben gleicher Dichte der Luft würde die den barometrischen Druck ausübende Luftsäule ebensoviel an Höhe abnehmen, als man sich mit dem Instrument senkrecht von der Erdoberfläche erhebt. Der Druck nähme also in ganz einfachem Verhältniss ab und das Barometer sänke um so tiefer, je höher man steigt; dies geschieht wirklich, aber so, dass in den höheren Regionen für dieselbe verticale Höhendifferenz ein weit geringeres Sinken des Quecksilbers erfolgt, als näher bei der Erdoberfläche, weil die Luftdichte nach oben stätig abnimmt. Erfahrungsgemäss muss man unter sonst normalen Verhältnissen an einem Ort mit dem mittleren Barometerstand von 760 Millim. 10,5 Meter hoch steigen, damit das Quecksilber um 1 Millim. sinkt. Nimmt man die Luftdichte in der 10,5 Meter hohen Schicht konstant an, was ohne grossen Fehler geschehen kann, so hat die darüber liegende Schicht gleichen Volums geringere Dichte, denn sie steht unter schwächerem Druck. Weil aber ein noch gesondert zu erörterndes Erfahrungsgesetz lehrt, dass die Dichte der Luft in geradem Verhältniss zu dem auf ihr

lastendem Druck steht, so findet sich  $a : b = 760 : 759$ ,  $b = \frac{759}{760} a$ .

Wenn demgemäss eine Luftschicht der Dichte  $a$  an ihrer oberen und unteren Grenze eine Barometerdifferenz von 1 Millim. bietet, so kann eine desselben Volums aber der Dichte  $b$  den Barometerstand nur

um  $\frac{759}{760}$  Millimeter beeinflussen, und derselbe ist desshalb an der

obere Grenze von  $b$ ,  $759 - \frac{759}{760} = \frac{759 \cdot 760 - 759}{760} = \frac{759^2}{760}$

Millimeter. — Die Dichte der nächst oberen gleich voluminösen Luftschicht  $c$  verhält sich ebenso zu derjenigen von  $b$ , wie die beiderseitigen Barometerstände  $b : c = 759 : \frac{759^2}{760}$

$c = \frac{759}{760} b =$

$\left(\frac{759}{760}\right)^2 a$ , demgemäss sinkt in ihr das Quecksilber um  $\left(\frac{759}{760}\right)^2$

Millimeter und hat an ihrer Grenze den Stand  $\frac{759^2}{760} - \frac{759^2}{760^2} =$   
8\*



$$\frac{759^2 (760 - 1)}{760^2} = \frac{759^3}{760^2} \text{ Millim. Die in analoger Weise auf-}$$

zufassende Luftschicht d hat die Dichte  $\left(\frac{759}{760}\right)^3$  a und am oberen

$$\text{Ende den Barometerstand } \frac{759^3}{760^2} - \frac{759^3}{760^3} = \frac{759^4}{760^3} \text{ Mi limeter.}$$

Dessgleichen besteht oberhalb der fünften Luftschicht von (er zu- nächst der Erdoberfläche einem Quecksilberfall von 1 Millim. ent-

sprechenden Höhe der Barometerstand  $\frac{759^5}{760^4}$  und allgemein in der

$$\text{Höhe m. 10,5 Meter } \frac{759^m}{760^{m-1}} = 760 \left(\frac{759}{760}\right)^m \text{ und in der Höhe}$$

$$n. 10,5 \text{ Meter } \frac{759^n}{760^{n-1}} = 760 \left(\frac{759}{760}\right)^n. \text{ — Weiss man umge-}$$

kehrt die beiden letzten Barometerstände, so ist die Hö h e n d i f f e - r e n z der Beobachtungsorte  $(m - n) 10,5 \text{ Meter} = h$ . Setzen wir

$$760 \left(\frac{759}{760}\right)^m = b \text{ und } 760 \left(\frac{759}{760}\right)^n = b,, \text{ oder } \log 760 +$$

$$m (\log 759 - \log 760) = \log b \text{ und } \log 760 + n (\log 759 - \log 760) = \log b,, \text{ folglich } \log b,, - \log b = (n - m) (\log 759 - \log 760)$$

$$\log 759 = 2,8802418$$

$$\log 760 = 2,8808136$$

$$- 0,0005718$$

$$\log b,, - \log b = (m - n) 0,0005718$$

$$m - n = \frac{\log b,, - \log b}{0,0005718}$$

$$h = 10,5 \frac{\log b,, - \log b}{0,0005718} = 18363 (\log b,, - \log b) \text{ Meter}$$

$$= 56386 (\log b,, - \log b) \text{ Pr.}'$$

Bei jeder Anwendung dieser Formel für barometrische Höhenmessungen sind Korrekturen nöthig. Eine derselben bezieht sich auf die Quecksilbertemperatur, weil wegen der ausdehnenden Kraft der Wärme in sehr erniedrigter Temperatur dasselbe auf einen kleineren Raum zurückgehen wird, ohne dass der Luftdruck abnahm. Die Reduktion auf den Nullpunkt der Thermometerskala knüpft an die Erfahrung an, dass die Quecksilbersäule für

1<sup>o</sup> Reaumur'scher Thermometereintheilung ihre Länge um  $\frac{1}{4440}$  ver-

ändert, so dass am beobachteten Stand, je nachdem sich die Temperatur des Quecksilbers über oder unter Null erweist, beziehungsweise



eine Addition oder Subtraktion von  $\frac{bt}{4440}$  vorzunehmen ist. Für die Centesimaleintheilung des Celsius'schen Thermometers ist der auf den Gefrierpunkt reducirte Barometerstand  $b - 0,00018018b.t.$  — Der Temperatureinfluss auf die Glasröhre und die Skala wäre zur Erzielung höchster Genauigkeit auch zu würdigen, kann jedoch wegen Geringfügigkeit der Störung gewöhnlich vernachlässigt werden. Eine zweite Correktion wendet sich gegen den Einfluss der Wärme auf die Luft. Diese wird nämlich bei ihrer Ausdehnung in der Wärme dünner und leichter, bei der Zusammenziehung in der Kälte dichter und schwerer, begünstigt also im ersten Fall das Sinken, im zweiten das Steigen des Quecksilbers, ohne dass der Luftdruck als solcher es verschuldet. Erfahrungsgemäss beträgt die Ausdehnung einer Luftsäule für  $1^{\circ}R.$   $\frac{1}{213,3}$

ihrer Länge. Im Allgemeinen und bei nicht sehr hohen Ansprüchen auf minutiose Genauheit wird der Lufttemperatur hinlänglich Rechnung getragen, wenn man die corrigirte Formel

$$56386 [1 + 0,002 (T + t)] (\log b, - \log b)$$

anwendet, worin  $T$   $b$ , und  $t$   $b$  beziehungsweise die Thermometer- und Barometerstände unten und oben bezeichnet. — Die Schwere, welche gegen den Aequator hin abnimmt, gestattet in dieser Region der Quecksilbersäule eine grössere Steighöhe, als in der Nähe der Pole. In der That nimmt der mittlere Barometerstand in derselben Meridianlinie mit wachsender geographischer Breite ab; auch die geographische Länge ist, wenigstens lokal, nicht ohne Einfluss; denn während der mittlere Barometerstand im Meridian der Azorischen Inseln  $339,226'''$  beträgt, zeigt sich von da nach Ost und West eine Abnahme. Auf die Polhöhe  $p$  nimmt die sehr genaue Laplace'sche Formel Rücksicht, welche sowohl die Temperatur des Quecksilbers  $T$   $t$ , als diejenige der Luft  $T'$   $t'$  enthält und für Reaumur'sche Grade und rheinische Fuss lautet

$$58604 (1 + 0,0002837 \cos : 2 p) \left( 1 + \frac{T + t}{400} \right) (\log b, - \log b - \log \frac{4329 + T - t}{4329}).$$

Ebenso genau ist die Gauss'sche Formel:

$$56588 (1 + 0,0026 \cos . 2 \varphi) \left( 1 + \frac{T + t}{399} \right) (\log b, - \log b)$$

für Pariser Fuss, während die Angabe in Meter ausfällt, wenn statt 56588 steht: 18382. Feuchtigkeit der Luft, ungleiche Wirkung der Wände einer zu engen Röhre auf das Quecksilber, Verbiegungen oder Ungleichheiten der Skala sind von geringerer Bedeutung.



5. Der im Verlauf oft erwähnte mittlere Barometerstand ist das arithmetische Mittel sehr vieler Beobachtungen, indem man successive diejenigen eines Tages, Monates, Jahres vereinigt. Eine Einzelbeobachtung und auch mehrere ohne systematische Anordnung und Verbindung geben nie über die wahren Luftdruckverhältnisse eines Ortes Auskunft, weil das Barometer theils regulären, theils unregelmässigen Schwankungen ausgesetzt ist, welche innerhalb bestimmter Perioden ablaufen. Im Durchschnitt übersteigt der Unterschied zwischen höchstem und tiefstem Stand des Tages nicht 0,775 Millim. und fällt das Maximum auf 9 Uhr 37 Minuten Morgens und 10 Uhr 11 Minuten Abend, das Minimum auf 3 Uhr 45 Minuten Morgens und 4 Uhr 5 Minuten Abends. Dagegen beträgt die Differenz des höchsten und niedrigsten Jahresstandes 42,5 Millim. und ist im Allgemeinen der winterliche Barometerstand höher. Den Entstehungsmodus dieser Variationen kann man nur im Allgemeinen dahin angeben, dass die verschiedene Wärmevertheilung der Luft, ausgedehnte Wassergasverdichtungen, vielleicht verbunden mit elektrischen Ausgleichungen, in dem atmosphärischen Gleichgewicht Störungen setzen, welche in stärkeren Graden die Winde, und hiermit, sowie in den feineren den Wechsel des barometrischen Quecksilberstandes veranlassen.

Den Einfluss der geographischen Breite übersieht man aus folgenden Angaben:

|                       |           |        |            |
|-----------------------|-----------|--------|------------|
| Cap der guten Hoffung | 33° S.    | 763,01 | Millimeter |
| Rio Janeiro           | 23° „     | 764,03 | „          |
| Christianborg         | 5° 30' N. | 760,10 | „          |
| St. Thomas            | 19° „     | 760,51 | „          |
| Makao                 | 23        | 762,99 | „          |
| Madeira               | 32° 30'   | 765,18 | „          |
| Neapel                | 41        | 762,95 | „          |
| Paris                 | 49        | 761,41 | „          |
| Edinburgh             | 56        | 758,25 | „          |
| Spitzbergen           | 75° 30'   | 756,76 | „          |

und denjenigen der senkrechten Erhebung aus den Zahlen:

|                    |         |
|--------------------|---------|
| Meeresspiegel      | 28''    |
| Brocken 3650'      | 24,5''  |
| St. Gotthardt 7600 | 21      |
| Aetna 10300        | 19      |
| Montblank 14650    | 16      |
| Chimborasso 20100  | 12,833. |

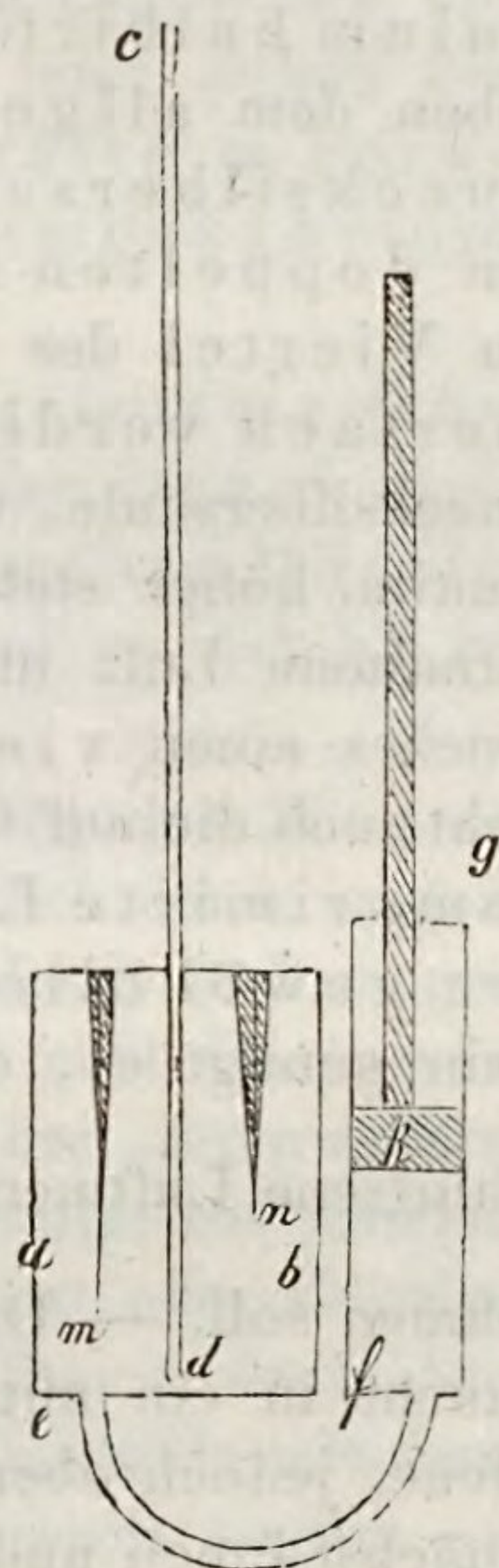
6. Weniger zu wissenschaftlichen Untersuchungen geeignet sind einige andre Barometerformen. — Bourdon's Metallbarometer.



meter besteht aus einer dünnen, biegsamen, plattgedrückten, in der zur plattgedrückten Seite senkrechten Ebene kreisförmig gebogenen Röhre, welche luftleer gemacht ist. Unter zunehmendem äusseren Luftdruck krümmt sie sich stärker und überträgt diese Bewegung mittels einiger an ihren Enden angebrachten Hebel auf eine längs einer Skala gleitende Nadel. Bei abnehmendem Luftdruck führt eine Spiralfeder den Zeiger gegen die andre Seite zurück. — Vidi's Aneroidbarometer wird von einem cylindrischen luftleeren Metallgefäss gebildet, dessen Deckel so dünn und elastisch ist, dass er unter stärkerem Luftdruck einwärts gewölbt wird, bei schwächerem aber wieder heraustritt, welche Bewegung durch Hebel einem Zeiger mitgetheilt wird. — Die wesentliche Einrichtung von Kopp's Differentialbarometer stellt Fig. 39 dar. In das Gefäss *ab* ist oben die enge Röhre *cd*, unten der gebogene Kanal *ef* eingesetzt, welcher im luftdicht schliessenden Cylinder *fg* mündet, in dem der Kolben *k* verschoben wird. Das unterhalb des letzteren befindliche Quecksilber wird bei seinem Niedergang nach *ab* gepresst und bedeckt hier alsbald die untere Mündung *d* des Röhrchens *cd*, so dass die oberhalb des Quecksilberspiegels in *ab* befindliche Luft von der äusseren abgeschlossen ist und durch vermehrt hereingepresstes Quecksilber komprimirt wird. Berührt der Quecksilberspiegel die Spitze *m*, so weiss man aus den gegebenen Dimensionen des Apparats, auf welchen Bruchtheil des ursprünglichen Volums die Luft in *ab* für die erzielte Quecksilberhöhe in *cd* komprimirt ist. Die von der gepressten Luft gehobene Quecksilbersäule *A* steht zum Barometerstand *B* der Beobachtungszeit in einem Verhältniss, welches für dasselbe Instrument konstant ist und durch einen Coëfficienten  $\alpha$  ausgedrückt wird, mit welchem *A* multiplicirt werden muss, um *B* zu erhalten  $B = \alpha A$ . Nach stärkerer Kompression steigt das Quecksilber in *ab* bis zur Drahtspitze *n*. Das hiermit geänderte Verhältniss der über *n* in *cd* stehenden Quecksilbersäule *D* zum Barometerstand wird ebenfalls für jedes Instrument in einem konstanten Faktor  $\beta$  gegeben, so dass  $B = \beta D$  und weil oben  $B = \alpha A$ , auch  $\beta D = \alpha A$ .

7. Enthält eine gebogene Glasröhre mit längerem offenen und kürzerem geschlossenen Schenkel in der Biegung so viel Quecksilber, dass es in beiden Schenkeln gleich hoch steht, so besitzt die dadurch im kürzeren Schenkel abgeschlossene Luft genau die Dichte der

Fig. 39.





äusseren, steht also unter dem allgemeinen einfachen Atmosphärendruck einer Quecksilbersäule von 76 Centim. Giesst man jetzt in den offenen Schenkel Quecksilber nach, so steigt der Spiegel in beiden. Ist dies soweit geschehen, dass die von der Luft eingenommene Röhrenlänge nur noch die Hälfte der vorigen Ausdehnung hat, die Luft also auf die Hälfte ihres ursprünglichen Volums zusammengepresst ist, in diesem halben Volum aber die doppelte Dichte des früher in einen doppelten Raum ausgebreiteten nämlichen Luftquantum angenommen hat, so bemerkt man, dass der Quecksilberspiegel der offenen Röhre, über demjenigen der geschlossenen um 76 Centim. erhoben ist, die komprimirte, in ihrem Volum halbirte, in ihrer Dichte verdoppelte Luft demnach neben dem allgemeinen Luftdruck von 76 Centim. noch die Quecksilbersäule von ebenfalls 76 Centim. trägt, mithin den doppelten Druck aushält. Soll die abgeschlossene Luft auf ein Viertel des ursprünglichen Volums komprimirt, oder vierfach verdichtet werden, so erreicht man dies mittels einer Quecksilbersäule, welche im offenen Schenkel 228 Centim. =  $3 \cdot 76$  Centim. höher steht, als im verschlossenen, wonach die im letzteren enthaltene Luft unter Hinzunahme des ursprünglichen Barometerdruckes einen vierfachen Atmosphärendruck erleidet. So steht auch die auf  $\frac{1}{3}$  des Volums oder zur dreifachen Dichte komprimirte Luft unter einem Druck, welcher das dreifache des gewöhnlichen Barometerstandes ausmacht und allgemein genügt es, den Druck zu vervielfachen, wenn eine abgeschlossene Luftmenge  $\frac{1}{n}$  Volum oder die nfache Dichte an-

nehmen soll. — Dasselbe ergibt sich aus dem umgekehrten Versuch. Taucht in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss eine oben und unten offene, jedoch oben verschliessbare Glasröhre, so steht die Flüssigkeit zunächst innen und aussen gleich hoch und die Luft in der Röhre hat, wenn das obere Ende verschlossen wird, die Dichte der äusseren. Wird jetzt unter beibehaltenem Verschluss die Röhre gehoben, wobei jedoch die untere Mündung stets unter Quecksilber bleibt, so wird der Luft ein grösserer Raum angeboten, welchen vermöge ihrer Ausdehnbarkeit erfüllend sie an Dichte verliert. Bald fängt innerhalb der Röhre das Quecksilber über den äusseren Spiegel zu steigen an, z. B. zur Höhe von 50,6 Centim., wenn hierbei über dem innren Spiegel der eingeschlossenen Luft noch ein Raum bleibt, der dreimal so gross ist als der ursprünglich von ihr eingenommene  $u$ , die Röhre also um  $2u + 50,6$  gehoben wurde. Von den 76 Centim. äusseren Luftdrucks werden durch den Gegendruck der in der Röhre gestiegenen Quecksilbersäule 50,6 Centim. im Gleichgewicht gehalten, so dass den zum Gleichgewicht nöthigen Ueberschuss von  $76 - 50,6 =$



$25,3 = \frac{1}{3} \cdot 76$  Centim. von der verdünnten Luft übernommen wird, oder umgekehrt und allgemein die auf das  $n$ -fache Volum und hiermit zu  $\frac{1}{n}$  der ursprünglichen Dichte gebrachte Luft nur unter  $\frac{1}{n}$  eines Atmosphärendruckes steht. — Es erwächst also das allgemeine Gesetz, dass die Räume sich umgekehrt verhalten, wie die Druckkräfte, und weil die Dichte um so grösser wird, auf je kleineren Raum die Luft zusammengepresst ist, so verhalten sich unter sonst gleichen Umständen die Luftdichten wie die pressenden Kräfte, oder stehen die diesen gleichen entgegendrückenden Expansivkräfte in geradem Verhältniss zu den Dichten und in umgekehrtem zum Volum der Luft.

Diesem Gesetz, unter dem Namen des Mariotte'schen bekannt, huldigen alle Gase, wenigstens so lang der Druck noch nicht jener Grenze allzunah tritt, bei welcher sie tropfbar flüssig werden. Bei der atmosphärischen Luft fand es sich bis zu hundertfacher Verdichtung bestätigt.

Auf diesen Thatsachen beruht die Einrichtung des Manometers, zur Messung von Druckkräften namentlich der in engen geschlossnen Bahnen strömenden Flüssigkeiten (Blutlauf) und an gespannten Gasen oder Dämpfen. Das Manometer mit komprimirter Luft besteht aus einer geschlossnen Glasröhre, deren untere offene Mündung in ein mit Quecksilber gefülltes Metallgefäss taucht, das durch eine Tubulatur mit dem zu prüfenden Gas oder Flüssigkeitsstrom verbunden ist. Derselbe treibt das Quecksilber in der Röhre hinauf, worauf das Gewicht der gehobenen Quecksilbersäule mit dem Druck der komprimirten Luft das Maass jener Stromkraft angibt. — Für Pressungen über fünf Atmosphären ist das Manometer mit freier Luft vorzuziehen, in welchem eine beiderseits offene sehr lange und starke Glasröhre in ein eisernes mit Quecksilber gefülltes Gefäss gekittet ist, mit dem durch einen Horizontalkanal eine der ersten parallele, gegen 4 Meter lange Metallröhre in Verbindung steht. Letztere empfängt am obren Ende den zu messenden Druck, welcher das Quecksilber in der Glasröhre so hoch treibt, bis der Druck der gehobenen Säule mit dem Atmosphärendruck der pressenden Kraft gleicht.

An Leslie's Stereometer, mit welchem man den wirklichen Raummfang poröser oder pulveriger Körper bestimmt, kommt dies Princip ebenfalls zur Anwendung. Taucht eine nach Centimetern eingetheilte, oben geschlossene Röhre bis zu einer



markirten, vom oberen Ende  $m$  Centim. entfernten Stelle mit der untren freien Mündung in Quecksilber, so dass also die Luft den Raum  $m$  Centim. einnimmt, so breitet sich diese, nachdem die Röhre soweit herausgezogen ist, dass das Quecksilber in ihr 38 Centim. über den äussern Spiegel stieg, hiermit in den Raum  $2m$  aus. Befand sich jedoch bei der ursprünglichen Stellung ein Körper vom Volum  $x$  im Hohlraum der Röhre, so hält diese nur  $m - x$  Centim. Luft, so dass nach demselben Verfahren die Luft für den Quecksilberstand von 38 Centim. nur auf  $2(m - x)$  sich auszudehnen hat. Findet sich daher, dass in Wirklichkeit die Kuppe der 38 Centim. hohen Quecksilbersäule vom oberen Ende  $n$  Centim. entfernt ist, so wird  $x + 2(m - x) = n$ , woraus  $x = 2m - n$ .

8. Die Druckkraft oder Elastizität der Luft, welche wir als Repräsentanten der Gase überhaupt gelten lassen, nimmt nicht nur bei Verminderung des Raumes zu, sondern auch bei Vermehrung der Wärme. Man kann annehmen, dass durch diese die bei den Gasen in so hohem Maasse ausgebildete abstossende Molekularkraft so sehr vermehrt wird, bis auch bei geringerer Dichte einem in der Kälte nur unter Einschränkung des Volums erträglichen Druck das Gleichgewicht gehalten wird. Man hat auf Anlass dieser Erscheinungen den Begriff der spezifischen Elastizität eingeführt und das Gesetz aufgestellt, dass unter gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen die spezifischen Elastizitäten der Gase sich umgekehrt wie ihre Dichten verhalten. Daraus berechnen sich die spezifischen Elastizitäten für Chlor 0,416, Fluorsäure 0,426, schweflige Säure 0,454, Kohlensäure 0,666, Sauerstoff 0,909, salpetrige Säure 0,961, Stickstoff 1,111, Kohlenwasserstoff 1,111, Ammoniak 2, Wasserstoff 16,666. —

9. Sobald die Luft als eine schwere Flüssigkeit anerkannt wurde, musste sich das archimedische Princip auf sie anwenden lassen, dass jeder Körper in ihr so viel an Gewicht verliert, als die verdrängte Luft wiegt, und durfte man erwarten, ein Körper, welcher bei geringer Dichte und grossem Umfang leichter wäre als das gleiche Luftvolum, werde in ihr in die Höhe steigen. Diese Idee der Luftschiffahrt fasste zuerst Montgolfier 1782, indem er einen mit erhitzter und deshalb erleichteter Luft gefüllten Ballon steigen liess. Charles, Pilatre de Rogier, Blanchard, Green verfolgten unter Benutzung des ungemein leichten Wasserstoffgases die Sache weiter, und bald wurde die Erfindung zu kriegerischen Rekognoscirungen und von Gay-Lussak nebst Andern zu wissenschaftlichen Untersuchungen verwendet.

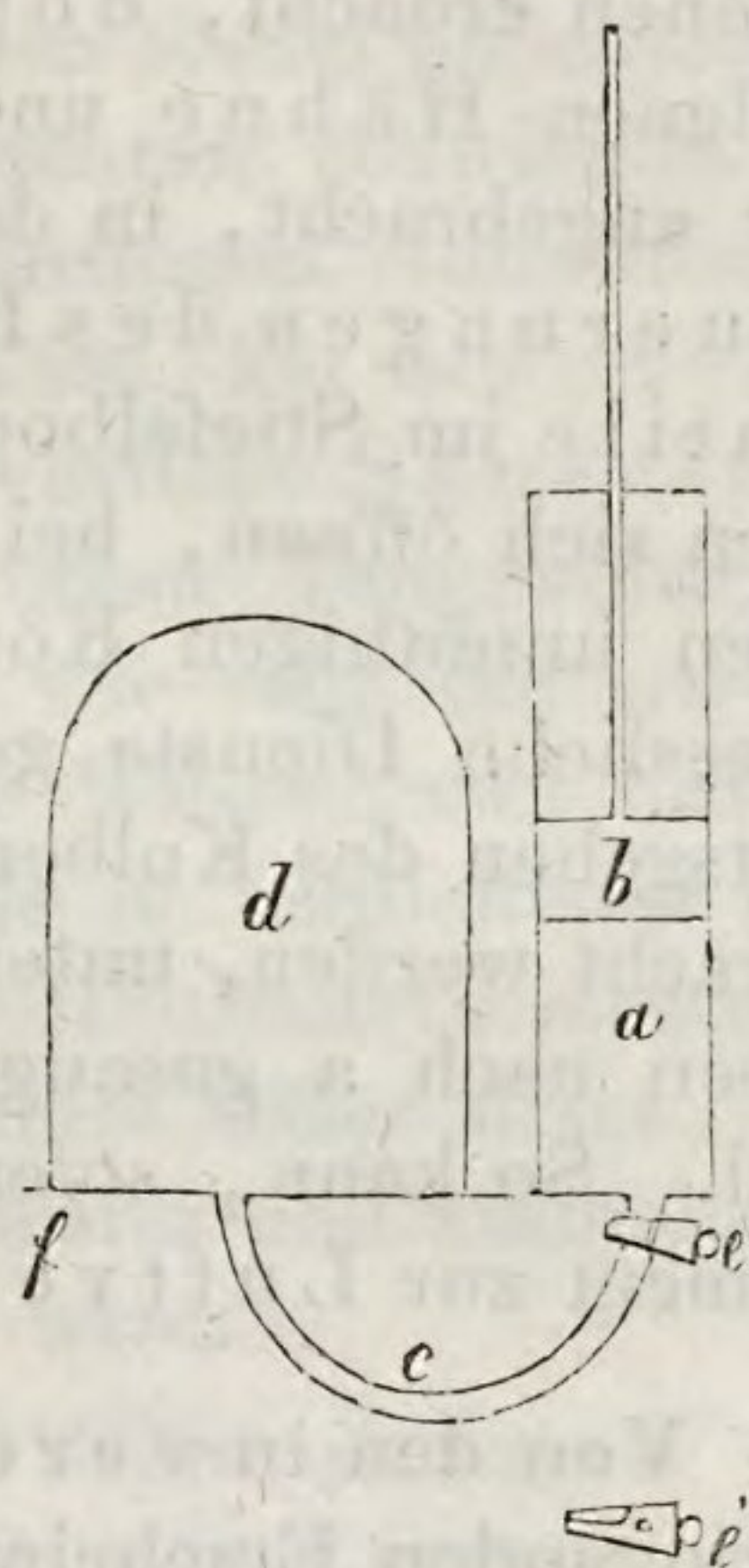
10. Stellte Torizelli durch Ausfliessen des Quecksilbers einen luftleeren Raum her, so gelang es Otto Guericke in Magdeburg mittels der Luftpumpe einen luftverdünnten Raum zu erzeugen,



welcher zu den in ihm anzustellenden Versuchen geeigneter war. — Im Cylinder oder Stiefel *a* wird der Kolben *b* luftdicht verschoben. *a* steht durch den Kanal *c* mit dem auf dem Teller *f* hermetisch aufsitzenen Recipienten *d* (gewöhnlich eine Glasglocke) in Verbindung.

Der Hahn *e* ist doppelt — in gerader und krummer Linie so durchbohrt, dass er in der ersten Stellung *e* den Recipienten mit dem Stiefel, nach Drehung um 90° in der zweiten Stellung *e'*, aber den Stiefel mit der äusseren Luft verbindet und den Recipienten abschliesst. Geht der Kolben aufwärts, so dehnt sich die Luft aus *d* und *c* nach *a* aus und nimmt dabei nach dem Mariotte'schen Gesetz an Dichte ab. Nachdem der Kolben oben ankam, wird der Hahn in die zweite Stellung gedreht, dadurch die in *d* zurückgebliebene Luft, welche, wenn *a* so viel Raum einnimmt als *d* und *c*, nur noch die Hälfte der äusseren Luftdichte besitzt, abgesperrt, der nach *a* gedrungene Antheil aber durch die gekrümmte Bohrung des Hahnes *e*, nach aussen gepresst. Nach Rückversetzung des Hahnes tritt wieder die erste

Fig. 40.



Bewegung und eine neue Ausdehnung, also Verdünnung der Luft in *d* — beispielsweise auf  $\frac{1}{4}$  der ursprünglichen Dichte — ein, worauf der nach *a* gedrungene Theil wieder hinausgedrängt wird, bis der den Eigenschaften des Instrumentes entsprechende Verdünnungsgrad erreicht ist. Weil in dem, wenn auch noch so kleinen, doch nicht ganz zu vermeidendem, sogenannten schädlichen Raum zwischen Hahn und Kolben die zurückbleibende Luft immer die Dichte der äusseren wieder annimmt und dann in die übrigen Räume der Pumpe sich verbreitet, so ist, abgesehen von andren kleinen Hindernissen, eine ideale Luftleere nie herzustellen. Bedeutet *d* den Raum des Recipienten (unter Hinzunahme des möglichst engen Lumens des Verbindungskanals) *a* denjenigen des Stiefel, so dehnt sich die Luft nach dem ersten Kolbenzug aus *d* in  $a + d$  aus und hat die Dichte

$$a + d : d = \delta : x \quad x = \frac{d \delta}{a + d}, \text{ worin } \delta \text{ die Dichte der äusseren Luft}$$

ausdrückt. Die Luft dieser Dichte vergrössert mit dem zweiten Kolbenzug ihr Volum wieder aus  $a + d$  in  $a + 2d$  und gewinnt danach die

$$\text{Dichte } a + 2d : d = \frac{d \delta}{a + d} : y, y = \delta \frac{d^2}{(a + d)^2}, \text{ dessgleichen nach}$$

$$\text{dem dritten Kolbenzug } z = \delta \frac{d^3}{(a + d)^3} \text{ und allgemein bleibt der}$$



Luft im Recipienten nach  $n$  Kolbenzügen die Dichte  $\delta \frac{d^n}{(a + d)^n}$ . Jedoch kann, wenn  $g$  der schädliche Raum ist, der

Verdünnungsgrad nicht über  $\frac{g}{d + g}$  hinausgehen. — Um die Verdünnung möglichst weit zu treiben, hat man die sinnreichsten Complicationen erdacht, doppelwirkende Luftpumpen konstruirt, in denen Hähne und Ventile zusammengreifen, zwei Cylinder angebracht, in denen die Kolbenbewegung alternirt, Selbststeuerungen des Hahnes eingeführt, denselben durch Blasenventile im Stiefelboden und Kolben ersetzt, welche bei Druck von unten sich öffnen, bei Druck von oben sich schliessen, und so unter vielen unnöthigen Kombinationen der Experimentalwissenschaft erspriessliche Dienste geleistet. — Der Hahn kann auch beim Aufwärtsgehen des Kolbens in die Stellung  $e$ , und beim Herabgang in  $e$  gebracht werden, unter welcher Modifikation im ersten Akte Luft von aussen nach  $a$  gesaugt, im zweiten dieselbe von  $a$  nach  $d$  gepresst wird. So kann, sofern  $d$  wandstark und befestigt ist, dasselbe Instrument zur Luftverdichtung gebraucht werden.

Von den in verdünnter und verdichteter Luft hervorzubringenden Erscheinungen werden nur einige charakteristische erwähnt. Die grosse Macht des äussern gewöhnlichen Luftdrucks erkennen wir an den Guerike'schen Halbkugeln, welche, nachdem aus ihrem Hohlraum die Luft ausgepumpt ist, nur mit bedeutender Anstrengung getrennt werden können, während sie von selber auseinander fallen, wenn durch Zulassung von Luft ins Innre die Kugel Fläche von Innen so stark als von Aussen gedrückt wird. — Aus gleichem Grund und weil die wirklich gepressten Flächen nur die Elementarfasern der Gewebe von ungemein geringer Ausdehnung sind, empfindet der Mensch die scheinbar grosse Last des Luftdruckes nicht, kann vielmehr ohne Belästigung eine beträchtliche Vermehrung oder Verminderung desselben ertragen. So fand Humboldt den Luftdruck auf dem Chimborasso bis zu 376,73 Millim. gesunken, erduldet aber anderseits, in einer Taucherglocke versenkt, den dreimal grösseren von 1150,47 Millim. In Gelenkpfannen, welche luftleer sind, scheint der darin sich bewegende Theil vom äusseren Luftdruck in seinem Gleichgewicht unterstützt zu werden. So mögen die Muskelkräfte am Schenkel geschont werden, indem die Luft das schwebende Bein gegen die luftleere Pfanne drückt. — Aus demselben Anlass sitzt die Recipientenglocke nach einigen Zügen auf dem Luftpumpenteller sehr fest und dehnt sich eine luftgefüllte Blase unter der ausgepumpten Glocke bis zum Zerspringen aus. — Ein Nachlass vorherigen Drucks zeigt sich im Sinken des Barometers, welches um so entschiedener



und schneller erfolgt, je beträchtlicher der Verdünnungsgrad von der äusseren Dichte abweicht. Hierher gehört auch, dass die in den Poren des Holzes, getrockneten Obstes, wie in den Flüssigkeiten suspendirte Luft entweicht, wenn auf deren Aussenfläche der Atmosphärendruck nicht mehr besteht, und dass ein Ei, dessen Schale fein durchbohrt ist, sich unter derselben Bedingung entleert. — Der von der Luft gegen Bewegungen geleistete Widerstand wird verdeutlicht, wenn man bemerkt, dass alle Körper im luftleeren Raum gleichschnell fallen, und Pendel mit beliebigen Linsen synchron schwingen. — Dass Lichter erlöschen, Thiere sterben, Gährungen unterbrochen werden, nachdem die umgebende Luft entfernt ist, hat den chemischen Grund, dass der diesen Akten unentbehrliche Sauerstoff fehlt. Dass aber Wasser schon bei gewöhnlicher Temperatur im luftleeren Raum ins Sieden geräth, beweist, wie sehr die auf der Oberfläche lastende Luft die Entwicklung des Wassergases hemmt. — Es kann erwartet werden, dass gegentheils in verdichteter Luft ein dünnwandiger, gewöhnliche Luft haltender Hohlraum zusammengepresst wird, das Barometer unter ihrem Einfluss höher steigt, und der Unterschied in der Fallzeit verschieden schwerer und voluminöser Körper noch auffälliger, als in der Atmosphäre wird.

**11.** Die spezifischen Gewichtbestimmungen der Gase können mit Hilfe der Luftpumpe sehr sicher gemacht werden. Eine Glaskugel bekannten Gewichtes  $a$  wiegt mit Luft gefüllt  $b$ , so dass das Gewicht des eingeschlossenen Luftvolums  $c = b - a$  ist. Darauf wird der Ballon luftleer gemacht und mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt. Wiegt er jetzt  $d$ , so ist  $e = d - a$  das Gewicht eines gleichgrossen Gasvolums. Die Dichte der Luft für  $0^{\circ}$  Temperatur und  $28''$  Barometerstand, welche  $0,0012987$  derjenigen des Wassers beträgt, als Einheit genommen, ergibt sich die jedes Gases  $x:1 = d - a : b - a$ ,  $x = \frac{d - a}{b - a} = \frac{e}{c}$ . So sind die spezifischen Gewichte von

|                  |        |
|------------------|--------|
| Sauerstoff       | 1,105  |
| Stickstoff       | 0,972  |
| Wasserstoff      | 0,069  |
| Chlor            | 2,470  |
| Kohlensäure      | 1,529  |
| Ammoniak         | 0,597  |
| Schweflige Säure | 2,247. |

**12.** Auf dem Luftdruck, der lokalen Verdünnung oder Verdichtung, sowie auf verschiedenen hydrostatischen Thatsachen beruhen viele Apparate der Wissenschaft und des bürgerlichen Lebens, von denen folgende angeführt werden mögen: —



1) der Heber, eine gebogene Röhre, deren eines Ende in die zu entleerende Flüssigkeit getaucht wird, welche sofort aus der freien Mündung so lang ausfliesst, bis das Niveau der ausgeströmten Flüssigkeit demjenigen der rückbleibenden gleicht. In diesem Augenblick tritt unter gleichseitigem Luftdruck hydrostatisches Gleichgewicht ein. Früher wurde, nachdem durch Saugen am freien Ende die Heberöhre luftleer gemacht war, in ihrem ansteigenden Schenkel die auf ihrem äusseren Spiegel den allgemeinen Luftdruck erleidende Flüssigkeit gehoben. Hat sie den Scheitel erreicht, so sucht sie vermöge der Schwere in beiden Schenkeln herabzufallen; dann entstünde aber am Scheitelpunkt ein luftleerer Raum, dessen Bildung der äussere Luftdruck verhindert, desshalb immer neue Massen hebt und zum Ausfluss bringt. Dass der Luftdruck die Ursache der Erscheinung ist, ergibt sich ausser der positiven Erklärung noch aus der indirekten Probe, laut welcher der Heber im luftleeren Raum seine Thätigkeit einstellt. — 2) Der Stechheber, ein offenes Gefäss, welches in eine enge freimündende Röhre ausläuft. Wird dasselbe unter einstweiligem Verschluss der untren Oeffnung mit Flüssigkeit gefüllt, so fliesst ein Theil derselben bei Oeffnung der untren und Verschluss der oberen Mündung aus. Dadurch verdünnt sich die zwischen letzterer und dem Flüssigkeitspiegel befindliche Luft so sehr, dass der an der Ausflussöffnung von unten nach oben wirksame äussere Luftdruck die Wasserschicht trägt. Das aufgehobene Ausfliessen beginnt sogleich wieder, wenn durch Freilassen der oberen Mündung der beiderseitige Luftdruck ausgeglichen oder das ganze Instrument in luftverdünnten Raum gebracht wird. — 3) Montgolfier's Stossheber oder hydraulischer Widder beruht einerseits auf der zeitweisen Vermehrung der Stosskraft bewegter Flüssigkeiten, welche in einer bestimmten Richtung ihres Verlaufs durch einen plötzlichen Widerstand aufgehalten werden, anderseits auf dem Druck der über einem abgeschlossenen Wasserspiegel stehenden verdichteten Luft. Aus einem natürlichen oder künstlichen Reservoir wird durch eine Röhre Wasser beigeleitet, welches anfangs durch eine seitlich an ihr angebrachte Oeffnung ausfliesst. Nachdem eine höhere Geschwindigkeit der Zuströmung erreicht ist, drückt das Wasser von unten nach oben ein Ventil in diese Oeffnung und verschliesst sich so selber seinen Weg. Der hiermit eingeführte Widerstand in der Stromrichtung setzt eine Vermehrung der Stosskraft in der Richtung der Röhrenachse, welche hinreicht, ein Kegelventil zu heben, das die nach oben umgebogene Röhre von einem erweiterten Gefäss dem Windkessel trennt, in welchen sofort das Wasser eintritt. Die zweite Abflussmündung, welche derselbe hat, wird vom eindringenden Wasser bald versperrt und daher die den übrigen Raum erfüllende Luft, welcher kein weiterer Ausweg geboten ist, zusammengepresst. Ihre

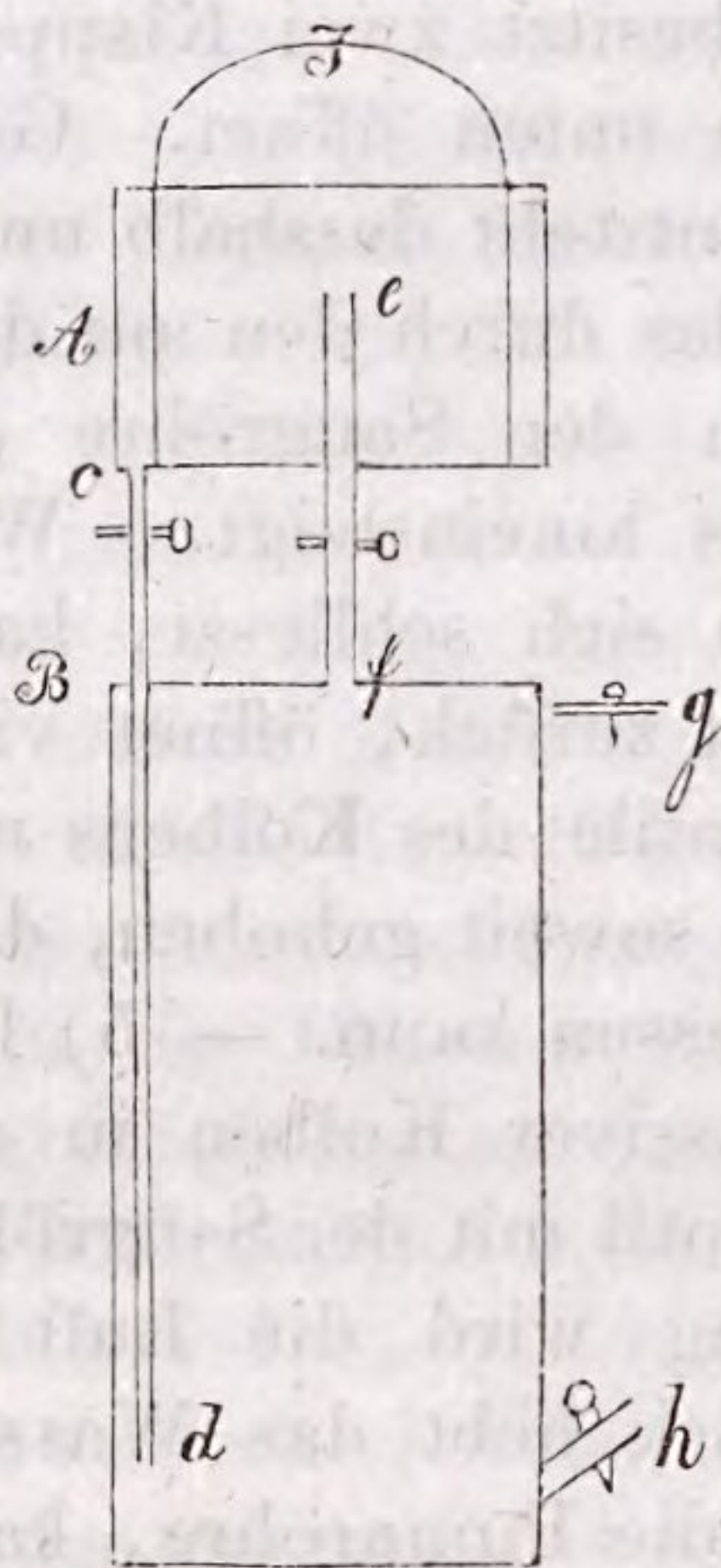


hiermit vermehrte Druckkraft presst das Kegelventil nach unten, hebt also die Möglichkeit des Rückflusses auf und treibt das Wasser in der von der genannten zweiten Abflussmündung beginnenden Steigröhre empor. Das durch die Zuleitungsröhre unterdess neuzuströmende Wasser gibt durch den Stoss auf das geschlossene Kegelventil seine Geschwindigkeit allmähig ab, die expandirten Röhrenwände ziehen sich zusammen, und das an der Seite des Zuflusskanales befindliche Ventil sinkt vermöge seiner Schwere herab. Von da ab wiederholt sich dieselbe Reihe der Erscheinungen. 4) Die Saugpumpe. Das Pumprohr steht mittels eines durch Druck von unten nach oben geöffneten und umgekehrt geschlossnen Kegelventils mit dem in einen unterirdischen Wasserspiegel tauchenden Saugrohr in Verbindung. Der in der Pumpröhre verschiebbare Kolben besitzt zwei Klappenventile, welche Druck von oben schliesst, von unten öffnet. Geht der Kolben aufwärts, so hat erstres statt und entsteht desshalb unter ihm ein luftverdünnter Raum, in welchen bald das durch den auf dem Wasserspiegel lastenden Atmosphärendruck in der Saugröhre gehobene Wasser nach Hebung des Kegelventils hineinsteigt. Weil nun dieses Ventil beim Herabgang des Kolbens sich schliesst, kann das in die Pumpröhre gedrungene Wasser nicht zurück, öffnet vielmehr nach einiger Ansammlung die Klappenventile des Kolbens und wird schliesslich vom aufwärtsgehenden Kolben soweit gehoben, dass es aus einer Abflussrinne der Pumpröhre ausfliessen kann. — 5) Die Druckpumpe. Hier bewegt sich ein massiver Kolben in der Pumpröhre, welche ebenfalls durch ein Kegelventil mit der Saugröhre in Zusammenhang steht. Beim Kolbenaufgang wird die Luft in beiden Räumen verdünnt, der äussere Luftdruck hebt das Wasser, dies steigt, das Kegelventil emporpressend, in die Pumpröhre, kann aber, wenn der Kolben abwärts geht, nicht mehr zurück, weil das Kegelventil durch den Druck von oben nach unten geschlossen wird. Da ihm auch der Weg über den Kolben versperrt ist, so wird es in eine Seitenröhre hineingepresst und gelangt von ihr aus durch ein zweites Ventil in die Druck- oder Steigröhre. — 6) Der Heronsball. In ein geschlossenes Gefäss ist eine mit Hahn versehene geschlossene Röhre eingeschraubt. Das im Gefäss befindliche Wasser, unter dessen Spiegel letztre endet, spritzt durch sie heraus, wenn die abgeschlossene Luft durch vorheriges Einblasen verdichtet oder durch Erwärmung mit höherer Elastizität begabt wurde. — 7) Der Heronsbrunnen. Zwei senkrecht übereinander stehende Gefässe sind durch zwei Röhren verbunden. Die erste durchsetzt bloß das obere, indem es an dessen mit einem aufgebogenen Rand versehenem Deckel beginnt, und nahe am Boden des untren Gefässes frei endet. Durch sie wird das letztre von aussen mit Wasser gefüllt, welches, da die tiefliegende Mündung der ersten Röhre bald von der Flüssigkeit ver-



geschlossen wird, die Luft im Gefäss komprimirt. Die zweite Röhre beginnt am Deckel des untren Gefässes und endet innerhalb des oberen nahe seinem Deckel. Durch diese Röhre steigt die im untren Gefäss komprimirte Luft ins obere und drückt hier auf den Spiegel einer vorher durch eine Oeffnung im Deckel hereingebrachten Flüssigkeit. Die letzterwähnte Oeffnung ist jetzt dadurch verschlossen, dass eine enge Röhre eingeschraubt ist, welche aussen und unter dem Spiegel der Flüssigkeit frei mündet, und durch welche das Wasser des oberen Gefässes von dem darauf lastenden Druck der komprimirten Luft springbrunnenartig emporsteigt. — 8) Das Gasometer. Die beiden

Fig. 41.

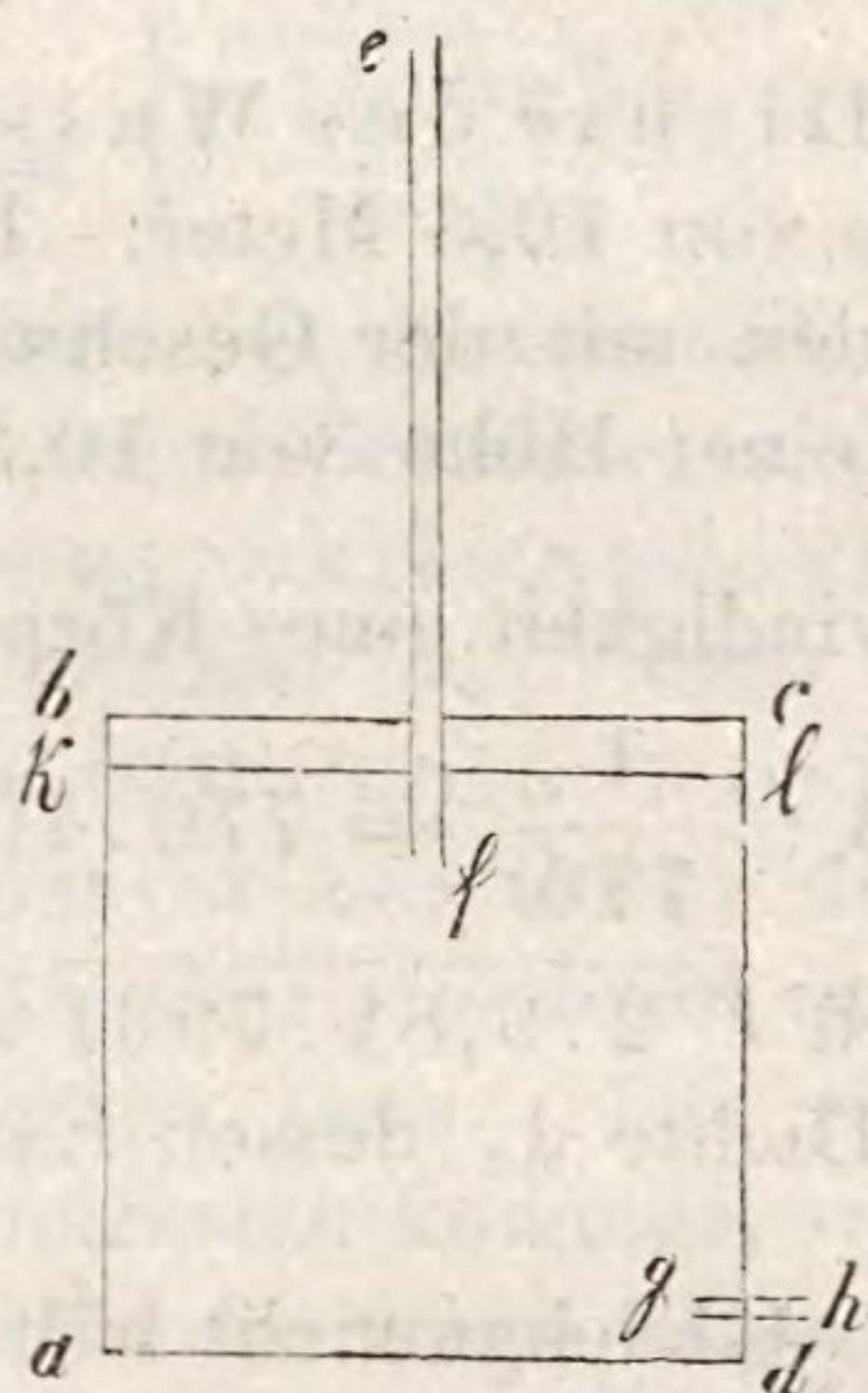


Gefässe A und B, deren erstres oben offen ist, sind durch zwei Röhren verbunden. c d geht vom Boden des B bis zu denjenigen des A e f vom Deckel des B bis etwa in die Mitte von A, und jede ist zwischen beiden Gefässen mit einem Hahn verschliessbar. Sonst hat B einen Ableitungskanal g und eine Oeffnung h, welche beide verschliessbar sind. Wird zuerst blos der Hahn von c d geöffnet, so fliesst Wasser von A nach B und verdrängt daraus die durch g entweichende Luft. Nachdem B gefüllt ist, wird der Hahn von c d geschlossen und durch h irgend ein Gas zugeleitet, wobei für jede eintretende Gasblase das verhältnissmässige verdrängte Wasserquantum herausfliesst, indem h neben der Gaszuleitungsröhre einigen freien Raum lässt, g wie jeder andre Hahn aber geschlossen ist. Hat man die beabsichtigte Gasmenge zugeleitet, so wird auch h geschlossen, der Hahn von c d und e f aber geöffnet. Wasser, welches durch c d nachgegossen wird, presst das Gas durch f e in die Glocke J oder durch g zu beliebigem Gebrauch ins Freie. — 9) In der Feuerspritze sind die Principien der Druckpumpe und des Heronsballs vereinigt, denn durch die Kolbenbewegung wird aus dem Wasserkasten in die Pumpenstiefel Wasser gesaugt und von da in den dazwischen stehenden Windkessel gepresst, dessen komprimirte Luft den Wasserstrahl durch den Schwanenhals hervortreibt. — 10) Die atmosphärische Eisenbahn besitzt zwischen den in gewöhnlicher Art gelegten Schienen eine eiserne Röhre, aus welcher mittels einer am Ziel stehenden Dampfmaschine die Luft gepumpt wird. Der darin luftdicht verschobene Kolben steht durch Klappen am Rücken der Röhre mit dem ersten Wagen in Verbindung und bewegt so den Zug mit einer Triebkraft, welche auf der derartigen Bahn zwischen Kingstown und Dalbey



12,5 Pfd. für den Quadratzoll beträgt. — 11) Ham's Aräometer, wenig von demjenigen Skannegatty's verschieden, besteht aus zwei unten offen oben durch eine Metallröhre verbundenen gleichweiten Glaszylindern, welche in zwei weitere zur Aufnahme der bezüglich der Dichte zu untersuchenden Flüssigkeiten bestimmte Gefässe tauchen. Durch einen an der Metallverbindungsröhre angebrachten Hahn kann die Luft so ausgesaugt werden, dass beide Fluida in ihren betreffenden Röhren zu Höhen aufsteigen, welche in verkehrtem Verhältniss zu ihren Dichten stehen. — 12) Das Mariotte'sche Gefäss, mittels dessen konstante Ausflussgeschwindigkeit trotz wechselnder Druckhöhe erzielt werden kann. Die Glasröhre ef geht luftdicht durch die obere

Fig. 42.



Wand des hermetisch verschlossenen mit der Ausflussröhre gh versehenen Gefässes abcd. Indem die Spannkraft der über dem Wasserspiegel kl abgeschlossenen Luft durch die im Verhältniss des Sinkens von kl durch ef eindringenden Luftblasen immer wieder um soviel vermehrt wird, als sie wegen Erweiterung des Volumens abnahm, halten sich die Wassermasse zwischen kl und f, die Luft in ef und der Atmosphärendruck im Gleichgewicht und fliesst das Wasser aus gh mit gleichförmiger, durch die Druckhöhe fg bestimmter, also vom Flüssigkeitspiegel, so lang er noch über f steht, unabhängiger Geschwindigkeit. — 13) Die Windbüchse

besteht aus einem starkwandigen Gefäss, durch eine von aussen nach innen sich öffnende Klappe mit dem Lauf verbunden, durch welchen, nachdem ein Stoss die Klappe öffnete, die im Gefäss verdichtete Luft die Kugel herausschleudert. — 14) Der Blasebalg ist ein luftdichter Kasten, dessen Hohlraum vergrössert und verkleinert werden kann. Im erstren Fall wird durch eine Oeffnung Luft eingesaugt, welche in der zweiten Bewegung durch eine zweite Oeffnung ausgepresst wird. — 15) Die Taucherglocke ist ein grosses luftdichtes Gefäss, welches mit der untern freien Mündung in Wasser gesetzt wird; die so darin abgeschlossene Luft hält durch ihre Expansivkraft dem äusseren Luftdruck und der über der Glocke stehenden Wassersäule das Gleichgewicht, so dass das Wasser nicht völlig eindringt. — 16) Die in physikalischen und chemischen Untersuchungen oft angewendete Sicherheitsröhre ist eine beiderseits offene zweimal gebogene Röhre, welche im untern Bogen etwas Wasser enthält, das zunächst in beiden Schenkeln gleich hoch steht und nicht nur den Innenraum der



Gasentwicklungsflasche, woran die Röhre häufigst angebracht ist, abschliesst, sondern zugleich den darin herrschenden Gasdruck nachweist, indem, sobald derselbe mit dem äusseren Luftdruck differirt, der dem Innern des Apparates zugekehrte Wasserspiegel einen beziehungsweise höheren oder tieferen Stand annimmt, als der gegen die Luft gewendete. — Endlich liessen sich hier eine Menge physikalischer Spielereien anreihen, wie der Zaubertrichter, das magische Tintenfass, der Oelkrug der Wittwe, das Sieb der Vestalin, der Zauberbrunnen, der Vexirbecher, die schwimmende Fontaine, die Schlange und der Storch u. s. f.

**13.** Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas in den luftleeren Raum ausströmt, hängt von seiner Dichte und dem Druck ab. Bei 28'' Barometerstand hat die Luft nur  $\frac{1}{770}$

der Dichte des Wassers und ihr Druck gleicht dem einer Wassersäule von 10,3 Meter. Da nun das Wasser unter so gelagerten Umständen mit der Geschwindigkeit eines Körpers ausströmt, welcher aus einer Höhe von 10,3 Meter herabgefallen ist, so wird die Ge-

schwindigkeit eines Körpers von der Dichte  $\frac{1}{770}$  durch die Fallhöhe

$10,3 : \frac{1}{770} = 770 \cdot 10,3 = 7931$  Meter bestimmt und ist somit

gleich  $\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 7931} = 382$  Meter und allgemein für ein Gas von der Dichte  $d$ , dessen Expansivkraft einer Wassersäule von der Höhe

$h$  das Gleichgewicht hält  $c = \sqrt{2g \frac{h}{d}}$ . Für ein andres Gas steht

unter gleichen Umständen  $c' = \sqrt{2g \frac{h'}{d'}}$ , sonach  $c : c' =$

$\sqrt{\frac{h}{d}} : \sqrt{\frac{h'}{d'}}$  d. h., die Ausströmungsgeschwindigkeiten

der Gase verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Quotienten der Druckhöhen und Dichten. — Für

$d = d'$ , steht  $c : c' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$ , d. h., für Gase von gleichen Dichten hängt die gegenseitige Strömungsgeschwindigkeit bloß von den Quadratwurzeln der Druckhöhen

ab, und für  $h = h'$ , kommt  $c : c' = \sqrt{d'} : \sqrt{d}$  d. h., für dieselben Druckhöhen und sonst gleiche Verhältnisse stehen die Ausströmungsgeschwindigkeiten in verkehrter Proportion zu den Quadratwurzeln der Dichten der betreffenden Gase.

Bei beiderseitig gleicher Dichte, Druckhöhe und Temperatur kann, abgesehen von chemischen Beziehun-



gen und Molekularwirkungen, von einem Ineinanderüberströmen ebensowenig die Rede sein, als von einer Bewegung des dünneren Gases gegen oder in das dichtere. Strömt dagegen das dichtere in das dünnere, wie verdichtete Luft in die Atmosphäre, so kann der Unterschied ihrer Expansivkräfte durch die Wassersäule  $h$  gemessen werden, so dass  $b + h$  die Druckhöhe der komprimirten,  $b$  diejenige der gewöhnlichen Luft von der Dichte  $\frac{1}{770}$  des Wassers

bedeutet. Daraus berechnet sich die Dichte des erstren  $x : \frac{1}{770}$

$$= b + h : b \quad x = \frac{b + h}{b \cdot 770}, \text{ folglich die Ausströmungsgeschwindigkeit} = \sqrt{2gh : \frac{b + h}{770 b}} = \sqrt{\frac{1540 g b h}{b + h}}. \text{ Das}$$

Produkt dieses Ausdrucks in den Flächeninhalt der Ausflussöffnung gibt die theoretische Ausflussmenge einer Sekunde, welche zur Auffindung der wirklichen mit den Contraktionscoëfficienten 0,71 0,65 0,58 0,55 zu multiplizieren ist, wenn beziehungsweise der Innendruck um 0,003 0,010 0,050 1 grösser ist, als der äussere. Auch beim Ausströmen der Gase findet eine Zusammenziehung des Strahles statt, welche durch konische Ansatzröhren gemindert werden kann. Die wirkliche Ausflussmenge soll der berechneten am nächsten kommen, wenn die konische Ansatzröhre sich so nach aussen erweitert, dass der Durchmesser der äussern Mündung das Doppelte desjenigen der innern und die Länge das Fünf- bis Zehnfache der letztern beträgt.

Den häufigsten Gebrauch ausströmender Gase macht man in den Gebläsen. — Beim Cylindergebläse bewegt sich in einem gusseisernen Cylinder ein luftdicht schliessender Kolben auf und ab. Die Luft, welche durch zwei oben und unten angebrachte, mit nach Innen sich öffnenden Klappenventilen versehene Löcher bald oberhalb, bald unterhalb des Kolbens in den Cylinder gesaugt wird, geht durch zwei gegenüberliegende Oeffnungen, deren Klappenventile vom Cylinder ab sich öffnen, in den sogenannten Kasten und von ihm komprimirt zum Feuerraum. — Im Wassertrommelgebläse saugt ein von beträchtlicher Höhe herabfallender Wasserstrahl aus Seitenlöchern der Fallröhre Luft zwischen die im Fall zertheilten Tropfen und reisst diese Luftblasen hinunter in den Windkasten, welcher aus einer Bodenöffnung das Wasser ablaufen lässt, während die über dem Wasserspiegel zusammengepresste Luft durch eine Düse zur gewünschten Stelle strömt.

Strömen Gase durch längere Röhrenleitungen, so bleibt



das Resultat tief unter den Werthen der obigen Formeln. Da nämlich die Fortpflanzung des Druckes meist sehr ungleich und unvollkommen ist, so steht die Ausflussmenge in verkehrtem Verhältniss zur Quadratwurzel der Röhrenlängen, so dass an den Enden von 4, 9, 16... mal längeren Röhren beziehungsweise 2, 3, 4... mal weniger Gas erscheint, als berechnet wurde. Eine genauere Formel für einen besondern Fall folgt bei den Aufgaben. —

Die Wirkungsfähigkeit bewegter Gase steht in geradem Verhältniss zu ihrer Masse und zum Quadrat ihrer Strömungsgeschwindigkeit.

14. Nicht unbeträchtlich ist der der Reaktion der Flüssigkeiten entsprechende Rückstoss bewegter Gase, wie derselbe beim Steigen der Raketen zur Erscheinung kommt.

Der Erwartung entgegen, dass jeder Luftstoss einen gegengehaltenen Körper in seiner Richtung bewegen würde, findet man, dass, wenn durch eine Röhre, deren vom Mund abgewendetes Ende mit einer konzentrischen Kreisscheibe versehen ist, man gegen eine dieser parallele nicht weit entfernte Scheibe heftig bläst, die letztere statt abgestossen zu werden, angezogen wird und sich ersterer anlegt. Der aus der engen Röhre in den weiten Raum zwischen beiden Scheiben sich seitlich verbreitende Luftstoss treibt nämlich die hier ruhende Luft über die Kreisränder nach aussen und wird so momentan ein luftleerer Raum hergestellt, worauf das Andrücken der zweiten Scheibe als eine nothwendige Folge des äusseren Luftdruckes erscheint. — Eine analoge Erscheinung — das sogenannte Saugen — findet an den Wänden einer Röhre statt, in welcher komprimirte Luft fliesst, welche wegen ihrer Bewegung auf die Seitenwände einen geringeren Druck übt als die äussere Atmosphäre. Dies ist namentlich der Fall, wenn aus einer engeren in eine weitere Röhre geblasen wird.

### Beispiele.

1. An zwei Punkten verschiedener Höhe ergeben sich die beziehungsweisen Barometerstände von 2,758 und 2,684 pariser Fuss und die Temperaturen 19,5° R. und 18° R. Welche Höhendifferenz wird hieraus berechnet?

$$56386 [1 + 0,002 (19,5 + 18)] (\log 2,758 - \log 2,684)$$

$$\log B - \log b = 0,0118118 \left\{ \begin{array}{l} 0,012697685 \\ 56386 \times \end{array} \right\} 715,97166641'.$$

$$1 + 0,002 (T + t) = 1,075 \times$$

2. Man beobachtet unter 22° 7' nördl. geogr. Breite am Meerespiegel 28'' rhein. Barometerstand bei Lufttemperatur von 19° R. und Quecksilbertemperatur von 21° R., in einer zu berechnenden Höhe



dagegen 19'' Barometerstand, 11° Luftwärme und 13° Quecksilbertemperatur.

$$\begin{array}{l}
 58604 (1 + 0,0002837 \cos . 44^{\circ} 14') \left(1 + \frac{30}{400}\right) \\
 \left(\log . 28 - \log 19 - \log \frac{4329 + 21 - 13}{4329}\right) \\
 \left. \begin{array}{l} \log . 28 = 1,4471580 \\ \log 19 = 1,2787536 \\ \log 4337 - \log 4329 = 0,0008018 \end{array} \right\} - 1,2795554 \left\{ \begin{array}{l} 0,1676026 \\ 0,1801994 \\ 58604 \\ \hline 10560,406' \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{40} = 1,075 \\ \text{nat. cos. } 44^{\circ} 14' = 0,71651 \\ 0,0002837 \\ \hline 1 + 0,000203273887 \end{array} \right\} 1,075218519428525
 \end{array}$$

3. In einem offenen Manometer, das an einem Gefäss mit gespanntem Dampf angebracht ist, steht das Quecksilber bei einem Barometerstand von 27'' 21'' hoch. Wie gross ist die Expansivkraft des Dampfes?

Wenn ein Kubikfuss Wasser 66 Pfd. wiegt, so ist das Gewicht eines Kubikfusses Quecksilber  $66 \cdot 13,598 = 897,468$  Pfd., also von einem Kubikzoll  $\frac{897,468}{1728} = 0,519$  Pfd., folglich beträgt der Druck einer Quecksilbersäule von  $27 + 21 = 48''$  Höhe auf jeden Quadratzoll  $0,519 \cdot 48 = 24,912$  Pfd. und dies ist das gesuchte Maass der Dampfexpansivkraft gegenüber einer Fläche von einem Quadratzoll.

4. Wie gross muss der Durchmesser eines papiernen Luftballons gemacht werden, wenn 100 Quadratfuss Papier 60 Loth, 1 Kubikfuss Luft  $2\frac{1}{4}$  Loth wiegt und er mit erhitzter Luft gefüllt werden soll, welche um ein Drittel leichter als die gewöhnliche Luft ist?

$$\begin{array}{l}
 \frac{3,1415 x^3}{6} \text{ Kubikinhalt des Ballon} \\
 3,1415 x^2 \text{ Oberfläche} \quad . \quad . \\
 \frac{3,1415 x^3}{6} \cdot \frac{2\frac{1}{4}}{3} \text{ Steigkraft des Ballon} \\
 3,1415 x \cdot \frac{60}{100} \text{ Gewicht} \quad . \quad . \\
 \frac{3,1415 x^3 \cdot 9}{6 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3,1415 x^2 \cdot 3}{5} \quad x = 4,8'.
 \end{array}$$

5. Der Stiefel einer Luftpumpe hält unter Abrechnung des Kolbens 40'' der Recipient nebst Kanal 160''. Wie gross ist die Luftdichte in diesem nach 8 Kolbenzügen?

$$\frac{160^8}{(160 + 40)^8} = 0,8^8 = 0,16777216.$$



6. Wie viel Kolbenzüge muss man an einer Kompressionspumpe thun, deren Recipient  $36''$ , deren Stiefel  $12''$  hält, um die Luft in erstem auf das Zehnfache zu verdichten?

$$10 \cdot 36 - 36 = 324'' \text{ sind einzupumpen}$$

$$324 : 12 = 27 \text{ Kolbenstösse.}$$

7. Welche Last kann auf einer horizontalen atmosphärischen Eisenbahn fortbewegt werden, deren Röhre  $15''$  Durchmesser hat, wenn nach Abzug aller Widerstände der wirksame Druck auf den Kolben  $\frac{3}{5}$  des Atmosphärendruckes beträgt und zur Fortbewegung

einer Last von 2240 Pfd. eine Kraft von 8 Pfd. nöthig erachtet wird?

$$\text{Kolbenquerschnitt} = 3,1415 \cdot 7,5^2 = 176,625''^2$$

$$\text{Atmosphärendruck auf } 1''^2 = 18 \text{ Pfd.}$$

$$\text{„ „ den Kolben} = 3179,25 \text{ Pfd.}$$

$$\text{davon wirksam } \frac{3}{5} \cdot 3179,25 = 1907,55 \text{ Pfd.}$$

$$8 : 2240 = 1907,55 : x \quad x = 534114 \text{ Pfd.}$$

8. Ein Gasometer enthält Leuchtgas von 0,56 Dichte der atmosphärischen Luft. Wie viel Kubikfuss strömen stündlich aus einer 400' langen 0,05' im Durchmesser haltenden Röhre, wenn das Manometer am Anfang der Leitungsröhre 0,011' am Ende 0,01' Quecksilberdruck zeigt, der Barometerstand 2,3' beträgt und eine Kälte von  $4,5^{\circ} \text{C}$ . unter Null herrscht?

d'Aubuisson hat für die Ausflussmenge der atmosphärischen Luft durch längere Röhren die empirische Formel aufgestellt

$$6189 \sqrt{\frac{1 + 0,004 \cdot t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H \cdot D^5}{L + 42 \frac{D^5}{d^4}}} \text{ in pariser Kubikfuss, welche,}$$

wenn d, der Durchmesser der Ausflussöffnung, gleich ist mit D, dem Durchmesser der Leitungsröhre, übergeht in 0,989 .

$$6189 \sqrt{\frac{1 + 0,004 t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H \cdot D^5}{L + 42 D}} \text{ und worin hier } t = - 4,5$$

$$b = 2,3' \quad h = 0,01' \quad H = 0,011' \quad D = d = 0,05' \quad L = 400'$$

$$\delta (\text{Gasdichte}) = 0,56 \quad \sqrt{\frac{0,011 \cdot 0,05^5}{400 + 42 \cdot 0,05}} =$$

$$\sqrt{\frac{0,011 \cdot 0,0000003125}{402,1}} = \sqrt{0,000000000000854}$$

$$= 0,0000029$$

$$\sqrt{\frac{1 - 0,004 \cdot 4,5}{2,3 + 0,01}} = \sqrt{\frac{0,982}{2,31}} = \sqrt{0,425108} = 0,652$$

$$0,989 \cdot 6189 \cdot 0,652 \cdot 0,0000029 = 0,0115734374268 \text{ d. i., Aus-}$$



flussmenge einer Sekunde für Luft der Dichte 1, demnach solche für Gas der Dichte 0,56  $= \frac{0,0115734374268}{\sqrt{0,56}} = \frac{0,0115734374268}{0,748}$   
 $= 0,015$ , folglich in jeder Stunde  $0,015 \cdot 3600 = 54$  Kubikfuss Gas.

9. Wenn die Dichte der auf  $100^{\circ}$  erhitzten Luft 0,727 der atmosphärischen ist, soll berechnet werden, mit welcher Geschwindigkeit aus einem 80' hohen Schornstein die Luft ausströmt?

$$\frac{80}{0,727} = 110' \text{ Luftsäule der Dichte } 0,727$$

$$110 - 80 = 30' \text{ Druckunterschied}$$

$$\sqrt{2 \cdot 30 \cdot 30} = 1,414 \cdot 30 = 42,42' = c.$$

10. Welche Druckdifferenz ist nöthig, um ausströmender Luft eine Geschwindigkeit von 50 Meter zu ertheilen?

$$50 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot h \cdot 0,76 \cdot 770}{0,76 + h}}$$

$$h = \frac{2500 \cdot 0,76}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,76 \cdot 770 - 2500} = 0,212 \text{ Meter Wasserhöhe.}$$

## VIII.

### Wellenbewegungen.

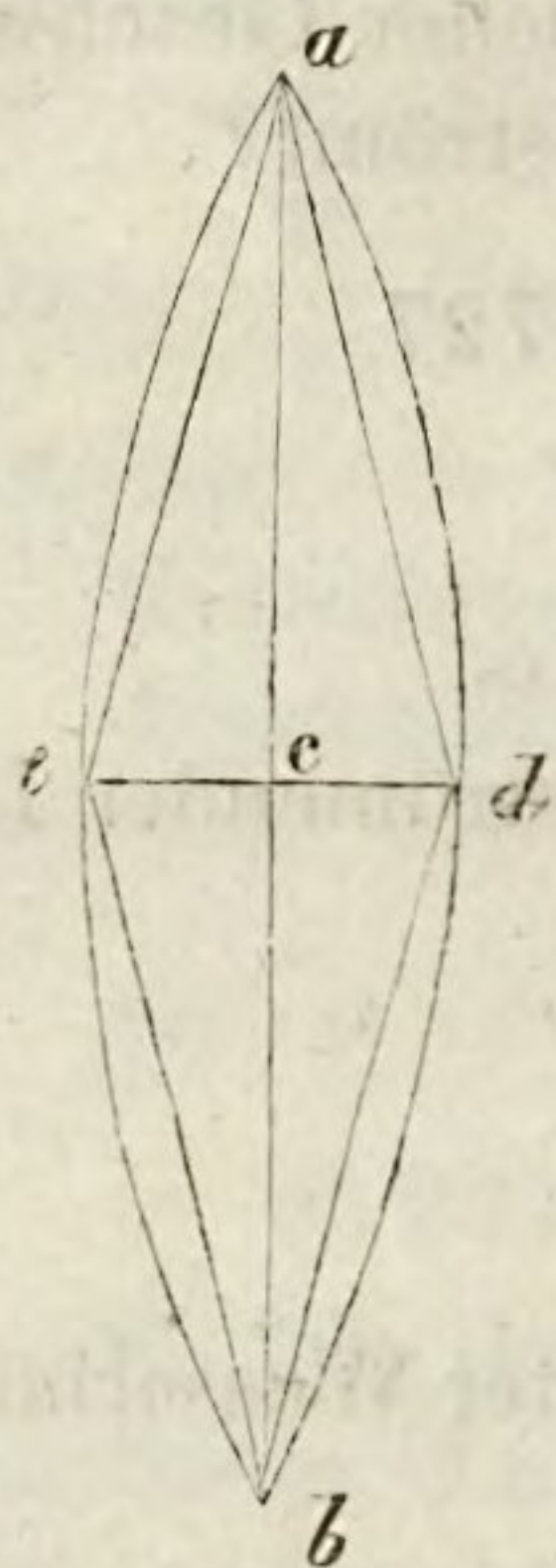
1. Wird in einem physikalischen Körper, als einem System materieller zusammenhängender Punkte das Gleichgewicht eines dieser Punkte in der Art aufgehoben, dass eine innerhalb bestimmter Grenzen periodisch wiederkehrende Bewegung desselben erfolgt, welche Schwingung heisst, so wird hiermit auch das Gleichgewicht der angrenzenden Punkte gestört, und die Elementarschwingung durch Uebertragung und Fortpflanzung in ein System von Schwingungen, Wellenbewegungen, Undulationen, Oscillationen oder Vibrationen erweitert. Diese Vorgänge können sich auf die Massentheilchen im Innern des Körpers beschränken, oder an dessen Oberfläche verlaufend merkliche Gestaltveränderungen veranlassen.

2. Die aus der Gleichgewichtslage  $acb$  nach  $adb$  gebrachte Saite schwingt wie ein Pendel nach  $acb$  zurück, darüber hinaus bis  $aeb$ , wieder zurück nach  $adb$  und hat jetzt eine ganze Schwingung



vollbracht. Indem bei sehr geringer Ausweichung die Bogen  $a d b d \dots$  mit den entsprechenden Sehnen zusammenfallen, entsteht das Parallelogramm  $a b d e$ , in welchem  $a d = b d = \frac{1}{2} l$  (nahzu) die Saitenspannung  $S$  ausdrückt, vermöge deren eine solche Zusammen-

Fig. 43.



ziehung der Fasern erfolgt, dass die Saite die beschriebenen Bewegungen ausführt. Die in den Linien  $a d$  und  $b d$  dargestellten Spanningskräfte bewirken also eine Bewegung durch die Parallelogrammdiagonale  $d e = 2 c d = 2 s$ , wobei  $s$  die Exkursionsweite, d. i. die grösste Entfernung des Saitenmittelpunkts vom Ruhepunkt bedeutet. Sofern  $d e$  ebenso von der Exkursionsweite, als die Spannung von der sie repräsentirenden halben Saitenlänge abhängt, so steht  $d e : 2 s = S : \frac{1}{2} l$ , woraus  $d e = \frac{4 s S}{l}$ .

Diese Kraft wirkt in der Art, dass ihre Intensität der Entfernung  $s$  vom Gleichgewichtspunkt proportional ist, für welchen Fall wir unter V. 1 die Formel der Schwingungs-

zeit  $= 2 \pi \sqrt{\frac{p}{K g}}$  aufstellten. Hier ist  $K = \frac{4 S}{l}$ , folglich  $t =$

$2 \pi \sqrt{\frac{p l}{4 g S}} = \pi \sqrt{\frac{p l}{g S}}$  und für einen andern Fall  $t, = \pi \sqrt{\frac{p, l,}{g S,}}$

woraus  $t : t, = \sqrt{\frac{p l}{S}} : \sqrt{\frac{p, l,}{S,}}$  und indem  $p$ , das Gewicht, für

Saiten derselben Substanz durch den vom Durchmesser  $d$  (im Quadratverhältniss) und der Länge  $l$  der Saite abhängigen Kubikinhalt

dieser bestimmt ist  $\dots t : t, = \sqrt{\frac{d^2 l^2}{S}} : \sqrt{\frac{d,^2 l,^2}{S,}}$

$= \frac{d l}{\sqrt{S}} : \frac{d, l,}{\sqrt{S,}}$  d. h., die Schwin-

gungszeiten stehen in geradem Verhältniss zu den Dicken und Längen der Saiten, aber in verkehrtem zu den Quadratwurzeln der Spannungen. — Für Saiten verschiedenen Materiales geht zur Feststellung der Gewichte die Dichte  $\delta$  und  $\delta,$  in die durch Dicke und Länge bestimmten Werthe als Faktor

ein, wonach  $t : t, = \frac{d . l . \sqrt{\delta}}{\sqrt{S}} : \frac{d, l, \sqrt{\delta,}}{\sqrt{S,}}$ , also unter sonst glei-



chen Umständen die Schwingungszeiten sich verhalten, wie die Quadratwurzeln der Dichten. — Je länger die Schwingung im Einzelnen dauert, desto weniger derselben können in der Zeiteinheit gemacht werden, wonach  $t:t_1 = n_1:n$  folglich  $n_1:n = d_1:\sqrt{d}$ ,  $\sqrt{d_1}:\sqrt{d}$ . — Wenn  $C$  die in der Durchgangsstellung  $acb$  erreichte grösste Geschwindigkeit ist, so stellt man diejenige jedes andren Punktes am besten dar als eine Kreisfunktion, indem man die Exkursionsweite als Radius nimmt, die Zeitdauer einer ganzen Schwingung in der Peripherie gegeben denkt und die Dauer von Anfang der Bewegung bis zu irgend einer Phase in Graden eines Bogens ausdrückt,

welcher aus der Proportion resultirt  $t:T = x:360$ ,  $x = \frac{360t}{T}$ .

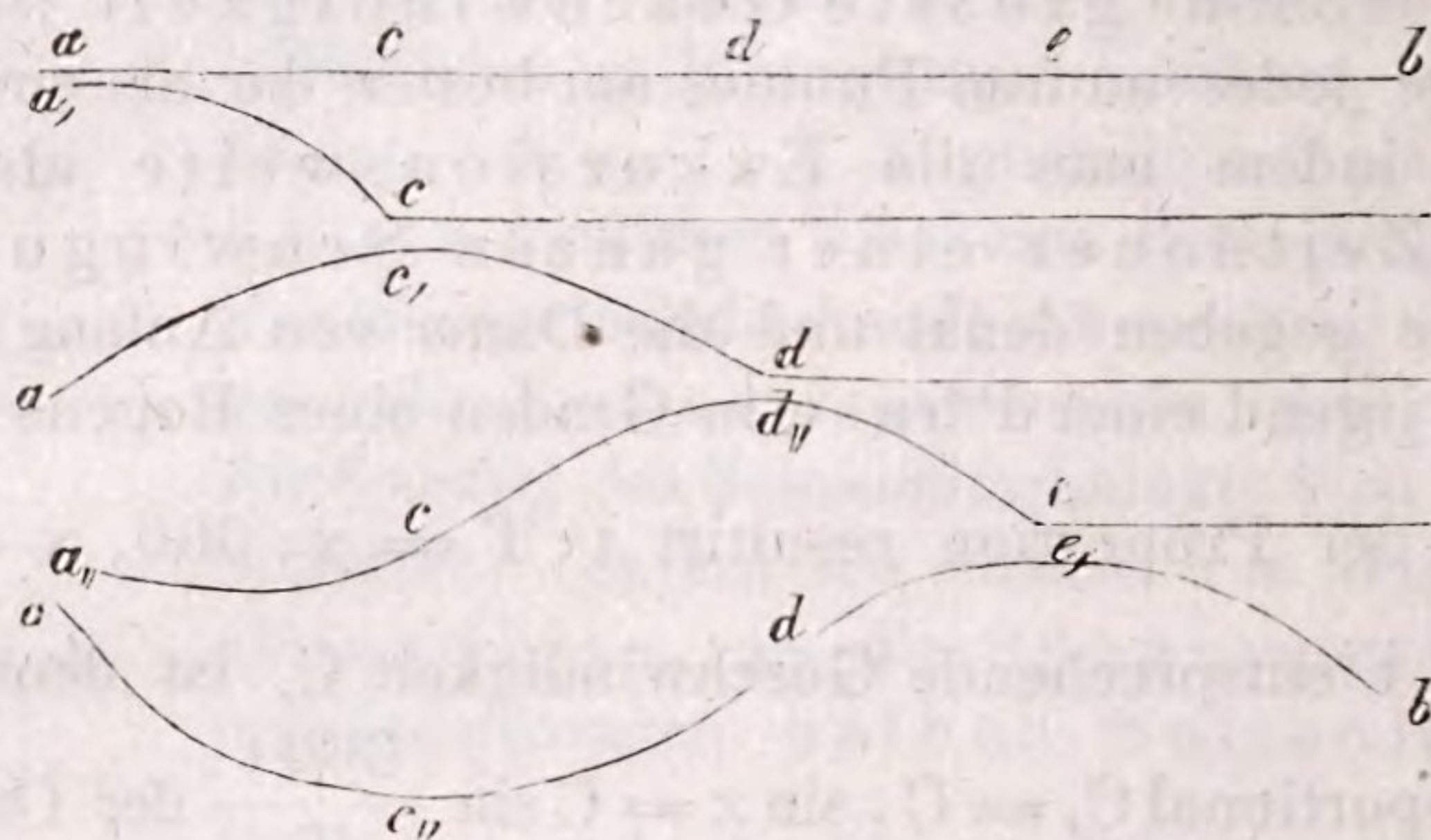
Die der Zeit  $t$  entsprechende Geschwindigkeit  $C_t$  ist dem Sinus des Bogens  $x$  proportional  $C_t = C \cdot \sin x = C \sin \frac{360t}{T}$  der Ort, an welchem sich der schwingende Punkt nach der Zeit  $t$  mit der Geschwindigkeit  $C_t$  befindet, dem Cosinus und gleich  $r \cos \frac{360t}{T}$ , worin  $r$  die grösste Exkursion bedeutet. Das Verhältniss der fraglichen Zeit zur vollen Schwingungszeit  $\frac{t}{T}$  bestimmt, wie man sieht, wesentlich die Schicksale der aufgestellten Formeln. So wird für  $\frac{t}{T} = 0$   $C_t = 0$   $v = r$  d. h., am Anfang der Schwingung, wenn die Saite in  $adb$  ist, ist die Geschwindigkeit Null, indem in diesem Moment die Bewegung erst beginnen soll, und die Amplitude gleich der grössten Exkursionsweite. Für  $\frac{t}{T} = \frac{1}{4}$  oder  $t = \frac{T}{4}$ , also nach Vollendung einer Viertelschwingung von  $adb$  bis  $acb$  wird  $C_t = C \sin 90^\circ$ , was ein Maximum ist. Für  $t = \frac{1}{2} T$  wird wieder  $C_t = 0$  und  $v$ , welches im vorigen Fall Null gewesen ist, wieder gleich der grössten Exkursion, aber, weil  $\cos 180$  negativ ist, nach der entgegengesetzten Seite. Für  $t > \frac{1}{2} T$  bis  $t = T$  wird  $\sin 360 \frac{t}{T}$  negativ, was bedeutet, dass die Bewegung jetzt in der der früheren entgegengesetzten Richtung verläuft.

**3.** Wird der Anfangspunkt  $a$  der geraden Linie  $ab$  (Fig. 44) in Schwingung versetzt, so kann man die Zeit einer ganzen Schwingung in vier gleiche Perioden und dem entsprechend die Länge  $ab$  in die vier Stücke  $ac = cd = de = eb$  zerlegen. Nach dem ersten Moment ist



a in a, angelangt und beginnt c gerade seine Bewegung, während die hinterwärts gelegenen Punkte noch völlig ruhen. Nach dem zweiten Zeittheil hat der Anfangspunkt nach a zurückgekehrt eine halbe

Fig. 44.



Schwingung gemacht, c ist in dieser zweiten Periode in einer Viertelschwingung nach c, gestiegen und d beginnt in dem Moment, in welchem beziehungsweise die Punkte a und c, erreicht sind, eben seine Bewegung. Das Ende der dritten Periode findet a in a,, c mit vollbrachter halber Schwingung nach c zurückgekehrt, d nach d, gestiegen, und e im Beginn der Bewegung. Am Schluss der vierten und letzten Epoche hat a eine ganze Schwingung vollendet, c,, drei viertel, d eine halbe, e, ein viertel davon fertig gebracht und der Endpunkt b ist gerade im Begriff, seine Bewegung zu beginnen. Durch die Strecke ab hat sich also in der Zeit, in welcher der primär angeregte Punkt a eine ganze Schwingung machte, die Bewegung fortgepflanzt. Die ganze Bewegung heisst eine Welle, deren Länge ab demnach nichts andres ist, als der Weg, durch welchen sich die Bewegung fortpflanzt, während ein Punkt eine ganze Schwingung macht, ac,, d das Wellenthal, de, b der Wellenberg.

4. Entstehen in der Zeiteinheit n Schwingungen von der Wellenlänge w, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $= nw$  und für einen andern Fall unter ähnlichen Verhältnissen  $c, = n, w,$ , woraus bei gleichen Geschwindigkeiten folgt  $n w = n, w,$

$$\left. \begin{array}{l} n : n, = w, : w \\ n : n, = t, : t \end{array} \right\} t, : t = w, : w$$

d. h., die Wellenlängen stehen in verkehrtem Verhältniss zu den Schwingungszahlen und in geradem zu den Schwingungszeiten.

5. Wird eine physische Linie, welche in mehrere gleiche Stücke getheilt gedacht wird, durch eine Erschütterung in einem Theilungspunkt



zu einer Wellenbewegung veranlasst, welche zwischen den beiden Grenzpunkten aus einer beliebigen Folge gleicher Berge und Thäler besteht, so wird die am befestigten Endpunkt im Weiterschreiten gehinderte Welle ihre noch nicht abgeschlossene Bewegung in eine rückwärtsgehende verwandeln, welche gleichgeartet ist, aber eine derartige Anordnung der Berge und Thäler besitzt, dass jedes Wellenthal an der Stelle erscheint, an welcher die ursprüngliche Welle einen Berg zeigte und umgekehrt dem Wellenthal der ursprünglichen ein Berg der zurückgeworfenen entspricht. Während die oben erwähnten Theilungspunkte, die sogenannten Schwingungsknoten, in vollkommener auch äusserlich nachweisbarer Ruhe bleiben, machen die zwischenliegenden Punkte abwechselnd auf- und abwärtsgehende Ausbiegungen, deren Gesamtheit als ein System stehender Wellen bezeichnet wird.

Werden Ebenen in Schwingungen versetzt, so treten die einzelnen Punkte in jenen wechselnden Schwingungszustand der stehenden Wellen, deren Schwingungsknoten in hyperbolische Linien fallen, welche je nach den Stellen der Befestigung und des Anschlages die in der Akustik als Chladnische Klangfiguren bekannten mannigfaltigen Zeichnungen bilden. Ist die Wellenlänge  $l$  und die Anzahl der Knoten  $n$ , so stehen die mittleren Knotenlinien um die Grösse  $\frac{2l}{2n-1}$  von einander ab. — Krumme Flächen werden ebenfalls leicht in stehende Wellen versetzt, deren Knotenlinien — wenigstens wenn die Krümmung einem Cylindermantel sich nähert — schraubenförmig so ansteigen, dass diejenigen der Innenfläche zwischen denen der Aussenfläche laufen.

6. Ist in diesen Fällen zwar immer ein Fortschreiten der Bewegung, was von einer Ortsveränderung des schwingenden Punktes selbst wohl zu unterscheiden ist, als der Welle charakteristisch befunden worden, so wurde doch die Bewegung jedes einzelnen Punktes senkrecht zur Fortpflanzungslinie als Transversalwelle gedacht. Wird aber innerhalb einer homogenen Masse das Gleichgewicht eines Punktes gestört, so bilden sich körperliche Wellen, deren kugelförmiges Vorschreiten so vorgestellt werden kann, dass die Schwingungsrichtung jedes Theilchens zur Fortpflanzungslinie parallel ist. Die so entstehende Longitudinalwelle besitzt an Stelle der eigentlichen Berge und Thäler Verdichtungs- und Verdünnungswellen in dem Medium, welches der Träger der Bewegung ist. In ihren mechanischen Effekten stehen diese Wellen zu den Quadraten der Entfernungen vom Schwingungsmittelpunkt in umgekehrtem Verhältniss. Denn



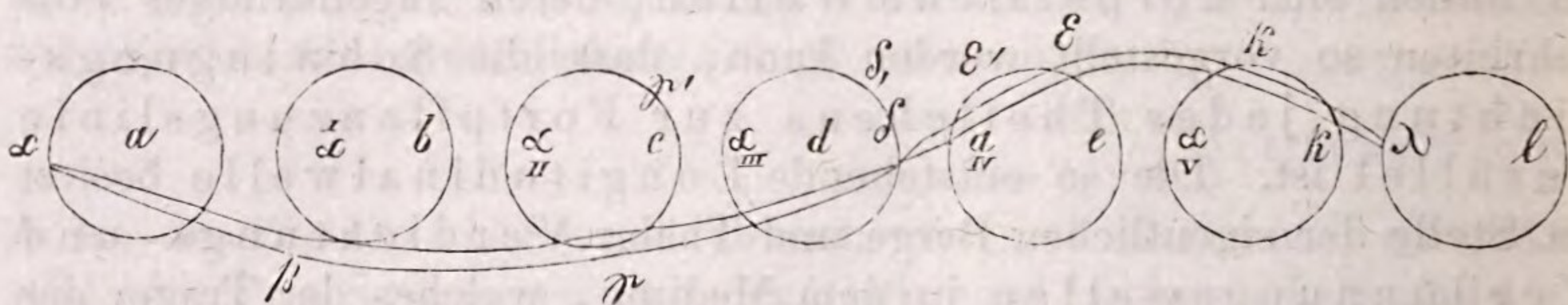
weil die aneinander grenzenden Wellen ihre lebendige Kraft sich unverkürzt mittheilen, so steht für zwei Wellen von den Massen  $M$  und  $m$  mit den beziehungsweisen Geschwindigkeiten  $C$  und  $c$

$$\begin{array}{l} M C^2 = m c^2 \quad M : m = c^2 : C^2 \quad \left. \begin{array}{l} c^2 : C^2 = R^2 : r^2 \\ M : m = R^2 : r^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} W : w = C^2 : c^2 \\ W : w = r^2 : R^2. \end{array} \end{array}$$

Ist dagegen die von den Wellen durchsetzte Masse von ungleichartiger Dichte und Elastizität, so treten in der Fortpflanzungsrichtung und Grösse sehr unregelmässige Resultate hervor, welche sich im Allgemeinen auf eliptoidische Verbreitungsflächen zurückführen lassen. —

7. In Flüssigkeiten ist die häufigste Ursache der Wellenbildung ein absichtlicher oder vom Wind ausgeübter Stoss gegen die Oberfläche. Ein Luftzug von  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{7}{8}$  Meter Geschwindigkeit erzeugt Kräuselung der Fläche; ein Wurf oder Stoss in den ruhenden Spiegel ein Wellenthal, das zunächst einen Wellenberg erhebt und um den Angriffspunkt herum in immer weiteren konzentrischen Kreisen vorschreitende Wellenberge und Thäler setzt. Diese oscillirenden Wellen werden bei mehrmaliger, von der Bewegungsbeharrlichkeit einer-, der Schwere anderseits unterhaltener Auf- und Abschwungung des Centralherdes der Bewegung immer wieder neugebildet und behalten selbst im fliessenden Wasser ihre kreisförmige Verbreitung in der Weise bei, dass ein als Erreger der Bewegung eingeworfener Körper auch im Fortschwimmen immer wieder den Mittelpunkt neuer Wellen bildet. Hierbei beschreibt übrigens jedes Wassertheilchen eine ungeschlossene krummlinige Bahn, deren Ende nach der Bewegungsrichtung weiter vorgerückt ist, als der Anfangspunkt, während in ruhender Flüssigkeit die Schwingungsbahn jedes Theilchens eine geschlossene Kurve und in grosser Tiefe eine Gerade bildet. Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass, wenn gleich die Welle selbst grosse Strecken durchschreitet, jedes einzelne Wassertheilchen seine Stelle im Raum nur vorübergehend zu ändern braucht, weil es diese Bewegung seinem Nachbar mittheilt.

Fig. 45.



Zerlegen wir die Wellenlänge  $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \lambda$  in sechs gleiche Theile, so hat  $a$  einen ganzen Umlauf in der Kreislinie von  $\alpha$  bis zurück nach



$\alpha$  durchgemacht, während  $b$  erst am Punkt  $\beta$  angekommen ist, der von  $\alpha_1$  um  $\frac{1}{6}$  der Peripherie entfernt ist. Ebenso hat

$$\left. \begin{array}{l} c \text{ erst } \alpha_{II} \gamma' \gamma = \frac{4}{6} \\ d \quad \alpha_{III} \delta' \delta = \frac{3}{6} \\ e \quad \alpha_{IV} \varepsilon' \varepsilon = \frac{2}{6} \\ k = \alpha_V \kappa = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \text{ der Kreisperipherie durchlaufen und das um}$$

die ganze Wellenlänge von  $a$  entfernte Theilchen  $l$  beginnt im dargestellten Moment seine Schwingung in  $\lambda$ . Die Verbindungslinie der in ihrer Succession der Lage und der Bewegung betrachteten Flüssigkeitmolekules gibt die Welle und man sieht wieder, dass die Wellenlänge der Raum ist, durch welchen sich die Schwingung in der Zeit fortpflanzt, in der das erste Theilchen eine ganze Schwingung vollendet.

Ausser der Stärke des Stosses scheint auf Höhe, Länge und Geschwindigkeit der Welle das spezifische Gewicht und die Tiefe der Flüssigkeit, sowie die Weite und die Begrenzungsart der zur Verfügung stehenden Bahn nicht ohne Einfluss.

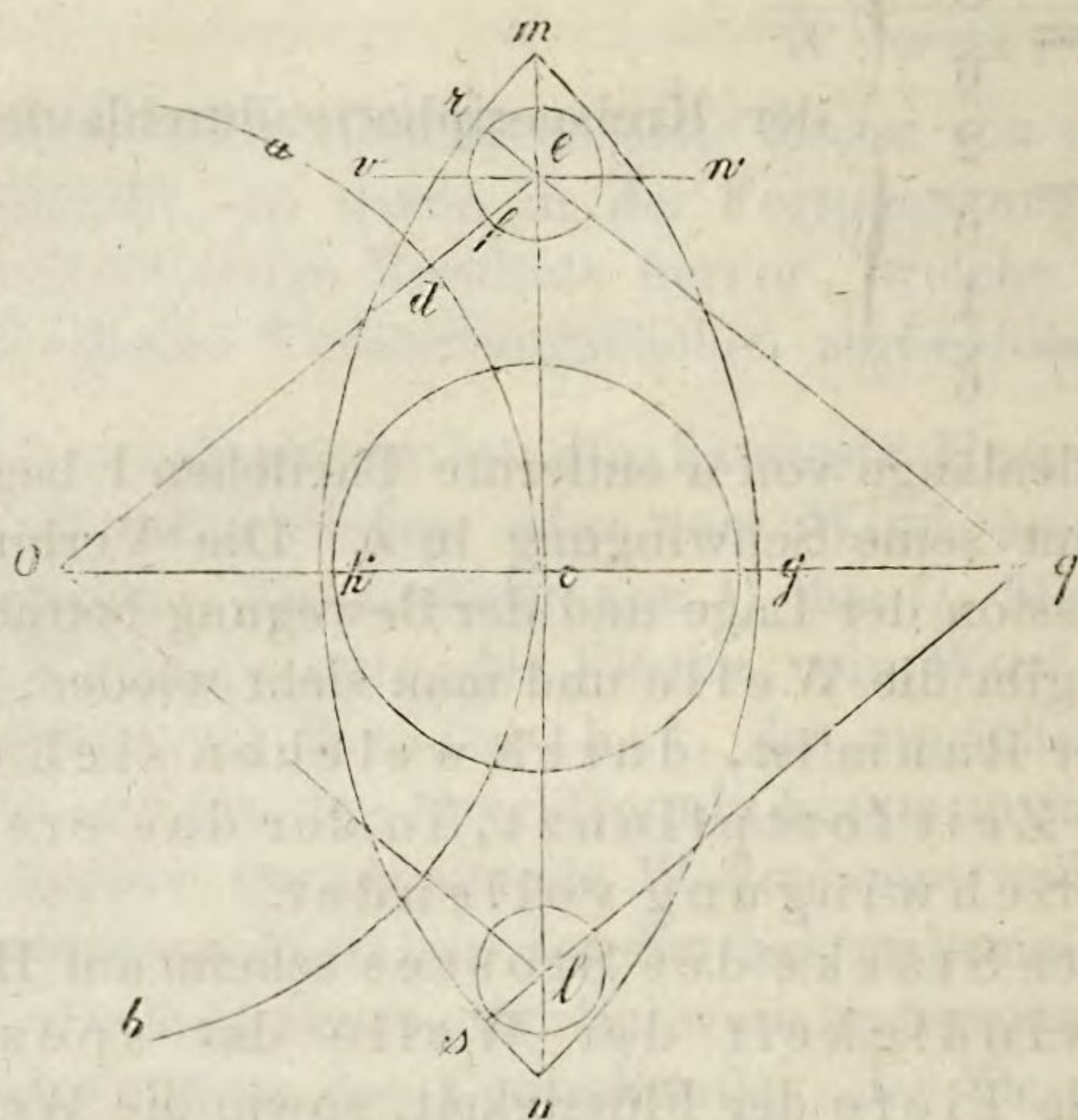
Eine besondere Art von Wellen — Transmissionswellen — entsteht, wenn in einer geschlossenen Flüssigkeitsbahn deren Querschnitt plötzlich so vergrössert wird, dass ein Wellenberg entsteht, welcher unter unbedeutender Verschiebung der einzelnen Wassertheilchen in offenen Kurven oder geraden Linien gewöhnlich ohne Theilung in einzelne Berge und Thäler vorschreitet, die am einen Ende erregte lebendige Kraft fast ungeschwächt ans andre überträgt und bei der Wassertiefe  $H$  und der Berghöhe  $h$  die Geschwindigkeit  $\sqrt{g(H+h)} = 3,132 \sqrt{H+h}$  Meter besitzt.

8. Begegnen sich zwei an verschiedenen Punkten erregte Wellensysteme oder kommt ein später erzeugtes einem früheren nach, so findet an den Stellen, wo gleichartige Exkursionsphasen zusammentreffen, Verstärkung statt, deren Grad gleich der Summe der einzelnen Höhen oder Tiefen ist, an denen aber, wo Berg und Thal zusammentrifft, eine Schwächung, welche der Differenz beider Höhen gleicht und desshalb zur Aufhebung wird, wenn die Wellen von derselben Grösse waren. Bei Durchkreuzung unter verschiedenen Winkeln ist zwar diese Erscheinung, welche Interferenz genannt wird, verwickelter, gehorcht jedoch bezüglich der Schicksale der einzelnen Punkte dem nämlichen Gesetz.



9. Bewegt sich die Kreiswelle  $a c b$  Fig. 46 so gegen die feste Wand  $m n$ , dass deren Mittelpunkt von  $c$  zuerst getroffen wird, alle seitlich gelegenen Punkte aber um so später, je entfernter sie von  $c$  sind, indem  $d e = o e - o c$  von der Grösse des Minuenden  $o e$ , dieser

Fig. 46.



aber ebenfalls in geradem Verhältniss als Hypotenuse des Dreieckes  $o c e$  bei Konstanz der Kathete  $o c$  von der Länge der  $e c$  abhängt, und ist die Geschwindigkeit der Welle  $a c b$  derartig, dass sie bei Abwesenheit der Wand in der Zeiteinheit nach  $m g n$  käme, so bildet sich in derselben Zeit, in welcher beim Vorwärtsschreiten die Halbkreiswelle  $c g$  entstanden wäre, die ebenso grosse rückschreitende Welle  $c k$ . Der Halbmesser der einem andern Punkt der Wand  $e$  entsprechenden Partialwelle ist um so viel kleiner, als  $k c$ , als dieser Punkt  $e$  von der Welle  $a c b$  später getroffen wird  $e f = c k - d e$ , denn gerade um wie viel später in  $e$  durch den Anstoss von  $a c b$  eine Wellenbildung veranlasst wird, um soviel weniger Zeit zur Verbreitung hat sie, als die in dieser Frist um den Punkt  $c$  hergestellte Partialwelle. Das Gleiche geschieht in  $l$  und verhältnissmässig an allen symmetrischen Punkten der Wand. Verbindet man die Oberflächen der sich theilweise interferirenden zurückgehenden Partialwellen, so erhält man die zurückgeworfene Welle  $m k n$ . Weil  $c e = c l$ ,  $c q = c q$   $\wedge$   $q c e = q c l$ , so ist  $\triangle c e q \cong \triangle c l q$ , folglich  $e q = l q$ ,  $e r = l s$ , mithin  $q r = q s$  und weil alle Punkte des Tangentialbogens  $m k n$  von je einem Punkt der Wand  $m n$  soweit entfernt sind, als die entsprechenden Punkte des mit  $a c b$  als konzentrisch anerkannten Kreisbogens  $m g n$ , ist  $m k n$  ein dem  $m g n$  gleicher Kreisbogen mit



dem Centrum  $q$  und wird überhaupt eine kreisförmige Welle von einer festen Wand so zurückgeworfen, als käme die reflektirte Wellenfläche von einem Punkt, welcher ebenso weit hinter der Wand liegt, als der Mittelpunkt der ursprünglichen Welle vor ihr gelegen war. — Die Linie, welche die für einen bestimmten Moment gültige Bewegungsrichtung eines Punktes der Oberfläche bezeichnet und auf dem daselbst als eben gedachten unendlich kleinen Stück der Wellenfläche senkrecht steht, heisst Wellenstrahl. So ist  $oe$  der Wellenstrahl für den Punkt  $d$  der einfallenden,  $qe$  der entsprechende für den Punkt  $r$  der zurückgeworfenen Welle. Wegen  $\triangle o c e \cong q c e$  ist  $\angle o e c = q e c$  d. h., eine Welle wird unter demselben Winkel von einer festen Wand zurückgeworfen, unter welchem sie einfällt, oder, indem auch, wenn  $vw \perp mn$   $\angle o e v = q e w$ : der einfallende und reflektirte Wellenstrahl bilden mit dem Neigungslothe gleiche Winkel.

Ist die reflektirende Wand eine krumme Fläche, so wird im Allgemeinen das Gesetz nicht alterirt; die besondern Erscheinungsformen hängen aber von den geometrischen Eigenschaften der gekrümmten Fläche ab. Da alle Radien des Kreises wie der Kugel zu unendlich kleinen Stücken der Peripherie und der Oberfläche senkrecht sind, so kehren alle Wellen, welche im Mittelpunkt eines Kreises oder einer Kugel erzeugt werden, nach Zurückwerfung von der Wand zum Mittelpunkt zurück. — In einer Ellipse bilden je zwei von den Brennpunkten an denselben Punkt des Umfangs gezogene Gerade bei jeder Lage des Punktes die gleichen Winkel zur Tangente desselben, und ist ihre Summe eine konstante Grösse. Darum treffen die in einem Brennpunkt der Ellipse erregten Wellen nach der Reflexion in gleicher Zeit im andern Brennpunkt ein. — In der Parabel bildet jede vom Brennpunkt an einen beliebigen Punkt der Kurve gezogene Gerade nebst der von diesem Punkt zur Achse gezogenen Parallelen gleiche Winkel mit der Tangente desselben Punktes, folglich gehen alle im Brennpunkt erzeugten Wellen nach der Zurückwerfung parallel mit der Achse weiter und werden umgekehrt alle parallel mit der Achse einfallenden Wellen von der Parabelkurve oder Fläche in den Brennpunkt geworfen. — Kleine Kreisbogen können für Parabeln substituirt werden, denn in der Gleichung des Kreises  $y^2 = dx - x^2$  darf der Subtrahend vernachlässigt werden, wenn die Abscisse  $x$  unendlich klein gedacht wird, wonach  $y^2 = dx$ , die Gleichung der Parabel, hervorgeht. Die Brennweite des Kreisbogens ist in diesem Fall gleich der Hälfte des Radius, weil sie für die Parabel vom Parameter  $d$  gleich dessen viertem Theil wäre.

**10.** Werden Wellen gegen eine feste Wand getrieben, in welcher



sich eine kleine Oeffnung befindet, so gehen die mittleren Partien ungestört durch. Dagegen entstehen an den Rändern durch das Anprallen neue Wellen, welche sich vor und hinter der Wand seitlich verbreiten und so auch an Stellen eine Bewegung setzen, welche man bei bloß direkter geradliniger Verbreitung der Schwingungen ruhend erwarten sollte. Dieses Phänomen — Beugung der Wellen — ist namentlich da von grosser Wichtigkeit, wo die Schwingungen Träger des Schalles, des Lichtes, der Wärme sind. —

**11.** Die Wellenbewegung ist von einem Körper auf einen andern übertragbar, auch wenn dieselben verschiedenen Aggregatzustandes sind. An zwei senkrecht verbundenen festen Körpern erzeugen die Längsschwingungen des einen, Querschwingungen des andern und wechselseitig. — Wie in Gasen, so kann jeder feste Körper auch in Flüssigkeiten von genügender Elastizität in Schwingungen gerathen, und solche dieser mittheilen, wobei deren Oberfläche Vibrationen zeigt, welche nach Faraday von besondern Strömungen herrühren.

**12.** Längenschwingungen fester, flüssiger oder gasförmiger Körper, welche unter Vermittlung unsrer Gehörwerkzeuge den in deren innern Partien verbreiteten Nerv so ansprechen, dass die Empfindung des Hörens in unsrem Bewusstsein erregt wird, betrachten wir als Träger des Schalles. — Weil die gewöhnlichsten Schallquellen Körper von sehr unregelmässiger Gestalt und ungleicher Elastizität sind, so ist zu erwarten, dass in jedem Schall eine Menge von Wellen sehr ungleicher Länge vereinigt sind; aber trotz dieser Verschiedenheit kommen sie gleichzeitig an der Stelle ihres sinnlichen Anspruches an. Weil nämlich Schwingungszeiten und Wellenlängen in geradem Verhältniss stehen, so durchmisst zwar eine Einzelschwingung von grösserer Länge eine ausgedehntere Strecke, als eine solche von kleinerer Länge, aber erstere braucht dazu auch eine verhältnissmässig grössere Zeit, so dass z. B. in derselben Frist, in welcher dieselbe den Raum von 6'' beschreibt, eine andre von nur 2'' Länge dreimal gebildet wird und desshalb in der nämlichen Zeit mit der längeren das gemeinsame Ziel erreicht. Desshalb ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles eine gleichförmige von der Wellenlänge unabhängige und wird nur von der Expansivkraft des elastischen Mittels in geradem und von dessen Dichte in umgekehrtem Quadratverhältniss beeinflusst. Der Schall legt in einer Sekunde einen Weg von 332,147 Meter oder 1022,5 pariser Fuss oder in runder Zahl 1024' zurück. Gilt diese Geschwindigkeit für 0°, so findet man sie für eine Temp. von  $t^0 = 332,147 \sqrt{1 + 0,003665 t}$ . — Weiss man, wie viel Schallwellen in einer Sekunde sich bilden,



so geht deren Anzahl  $n$  auf die Länge von 1024', weil dieser Weg in der Sekunde zurückgelegt wird. Daraus findet man die Länge einer einzelnen Welle  $l = \frac{1024}{n}$  und umgekehrt  $n = \frac{1024}{l}$ . —

In andren Gasen von dem auf 0° Temperatur reducirten Quecksilberdruck  $h$  der Dichte  $d$  und dem Verhältniss der Wärmekapazität bei konstantem Druck zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $k$  berechnet Laplace die Schallgeschwindigkeit nach der Formel

$$c = k \sqrt{\frac{gh}{d}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit der Luft als Einheit ge-

nommen ergibt sich dieselbe für Kohlensäure 0,786, Stickstoffoxyd 0,787, Kohlenwasserstoff 0,943, Sauerstoff 0,952, Kohlenoxyd 1,013, Wasserstoff 3,812. — In Flüssigkeiten und festen Körpern pflanzt sich der Schall stärker und schneller fort, namentlich wenn ihm Gelegenheit zu regelmässiger allseitiger Verbreitung gegeben ist. In erstren wird die Schallgeschwindigkeit an der Formel

$$\sqrt{\frac{g}{v}}$$

gemessen, worin  $v$  die Verkürzung einer Flüssigkeitsäule von

1 Meter Länge unter dem ihrem Gewicht gleichen Druck bedeutet. In letzteren verhält sich die lineare Verbreitung zur allseitigen wie  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ .

|                                                                   |                                                |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Für Silber ist die lineare Geschwindigkeit 9 die allseitige 10,99 | } als<br>mal grösser, als<br>diej. in d. Luft. |
| „ Kupfer „ 12 „ 14,65                                             |                                                |
| „ Zinn „ 7,5 „ 9,16                                               |                                                |
| „ Eisen „ 17 „ 20,75                                              |                                                |
| „ Gebrannter Thon „ 10—12 „ 12,42                                 |                                                |

**13.** Beim Uebergang von einem Medium in ein andres mit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit tritt neben der Schwächung, welche besonders merklich ist, wenn der Schallstrahl aus einem dünnen in ein dichteres Mittel geht, eine Ablenkung seines Weges ein. Diese Brechung des Schalles, welche im Wesentlichen auf den Differenzen der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien beruht, war theoretisch längst zu erwarten, wurde aber erst in neuerer Zeit von Sontheim experimentell nachgewiesen, indem er den Schall, der durch das Picken einer Uhr entsteht, durch eine aus Collodium gefertigte mit verschiedenen Gasen gefüllte Linse gehen liess.

**14.** Denkt man sich die Schallquelle als Mittelpunkt concentrischer Kugeln, zu deren Oberflächen senkrecht die Schallstrahlen sich verbreiten, so leuchtet ein, dass eine bestimmte Anzahl derselben eine um so grössere Fläche versorgen müsse, je weiter dieselbe vom Centrum absteht. Weil diese Flächen selber in geradem Verhältniss zu den Quadraten der Radien stehen, die Schallintensi-



täten aber, welche wir an die Dichte der auf die Fläche fallenden Schallstrahlen gebunden uns vorstellen, in umgekehrtem Verhältniss zu der der nämlichen Menge dargebotenen Flächenausbreitung, so erwächst das Gesetz, dass die Schallintensität im verkehrten Verhältniss zum Quadrat der Entfernung von der Schallquelle steht. An letztrer selbst hängt die Intensität von der lebendigen Kraft der schallerzeugenden Schwingungen ab und ist deshalb der Dichte und Elastizität des schalltragenden Mittels sowie dem Quadrat der Vibrationsgeschwindigkeit proportional. Endlich ist es auch für seine Stärke nicht gleichgiltig, ob sich das Fortpflanzungsmedium in Ruhe oder Bewegung befindet, welche letztre, je nachdem sie mit dem Schallstrahl gleichgerichtet, gekreuzt, oder entgegenlaufend ist, seine Verbreitung begünstigt oder beeinträchtigt. — Um den Schall möglichst ohne Schwächung fortzupflanzen, kommt sehr viel darauf an, seine Elementarschwingungen beisammen zu halten, deren Mittheilung auf eine geradlinige Ausdehnung hinzulenken und vor der schwächenden Verbreitung in die umliegenden Räume zu bewahren. Kommunikationsröhre, Sprachröhre und in umgekehrtem Sinn Hörrohr beruhen hierauf und knüpfen letztre dabei an die Eigenschaft der parabolischen Flächen an, die im Brennpunkt erregten Wellen parallel mit dem Parameter fortgehen zu lassen.

**15.** Interferenz, Beugung, Zurückwerfung des Schalles verlaufen ganz nach dem Modus der gleichnamigen Erscheinungen der allgemeinen Wellenlehre. Die letzte gibt zu Echo und Nachhall Anlass. Für das Echo muss die reflektirende Wand wenigstens 56 Fuss entfernt sein; denn der Schall braucht zu einem Weg von 1024' eine Sekunde; rechnet man hiervon die Hälfte auf den Hinweg, die andre Hälfte auf den Herweg, so kann bei 512' Entfernung der reflektirenden Wand die erste Silbe eines in der Sekunde noch deutlich vernehmbaren neunsilbigen Wortes gerade zurückkehren, nachdem die letzte ausgesprochen ist. In diesem Fall wird unter sonst günstigen Umständen ein neunsilbiges Echo gehört.

Um einsilbig zu sein, genügt demnach die Entfernung  $\frac{512}{9} = 56,8'$ . Bei geringerer Entfernung oder unregelmässiger Gestaltung der Wände bildet sich der in Kirchen und Sälen oft störende Nachhall, zu dessen Beseitigung eine passende Anbringung weicher Stoffe genügt.

**16.** Vernimmt unser Ohr eine Anzahl einfacher Schallschwingungen von so rascher Folge und Regelmässigkeit des Verlaufs, dass sie als einheitlicher Eindruck erfasst werden,



so nennen wir denselben einen Ton, an welchem folgende Momente untersucht werden.

1) Quantität des Tones, in ihren zahlreichen Nüancen als Höhe und Tiefe bezeichnet, bezieht sich darauf, dass das Ohr die Anzahl der auf eine Zeiteinheit kommenden Elementarschwingungen zählt, diese Zahl aber als Höhencharakter des Tons zum Bewusstsein gelangt. Bei welcher Schwingungszahl jene Grenze verläuft, hinter welcher das — im Allgemeinen als Geräusch bezeichnete — vereinzelte Auffassen der Schalle der Empfindung des Tones weicht, darüber sind die individuellen Urtheile je nach der Feinheit der Sinne ebenso verschieden, wie bezüglich der oberen Grenze, über welcher eine allzugrosse Vibrationszahl nur noch als feines Pfeifen oder Schwirren vernommen wird. Individuell mag manches noch als Ton gelten, was der Musik nicht mehr künstlerisch verwerthbar ist. Für sie ist der tiefste und höchste Ton mit 16 und 8192 ganzen Schwingungen hergestellt. Man findet experimentell, dass den

|   |   |   |   |                |
|---|---|---|---|----------------|
|   |   |   |   | 1              |
|   |   |   |   | 8              |
| „ | D | „ | „ | $\frac{9}{4}$  |
| „ | E | „ | „ | $\frac{5}{3}$  |
| „ | F | „ | „ | $\frac{4}{3}$  |
| „ | G | „ | „ | $\frac{3}{2}$  |
| „ | A | „ | „ | $\frac{5}{3}$  |
| „ | H | „ | „ | $\frac{8}{15}$ |

$c = 2$  zukommt, oder dass sie, da Schwingungszeiten und Saitenlängen in geradem Verhältniss stehen, beziehungsweise an Saiten der entsprechenden Länge unter sonst gleichen Umständen erzeugt werden. In der Zeit also, in welcher der Grundton C eine Schwingung vollbringt, macht dessen Sekunde  $\frac{9}{8}$  Schwingungen,

die Terz E  $\frac{5}{4}$ , die Quart F  $\frac{4}{3}$ , die Quint G  $\frac{3}{2}$ , die Sext A

$\frac{5}{3}$ , die Septime H  $\frac{15}{8}$  und die Oktave c 2 Schwingungen. In

ganzen angenäherten Zahlen ergeben sich daraus die relativen Schwingungszahlen C 24, D 27, E 30, F 32, G 36, A 40, 10\*



H 45, c 48. In der von diesen Tönen repräsentirten diatonischen Tonleiter werden die Sprünge von E auf F und von H auf c als halbe, diejenigen von C zu D, von D zu E, von F zu G, von G zu A, von A zu H, als ganze Töne bezeichnet und die grösseren Differenzen durch die Zwischentöne

|           |                                     |      |
|-----------|-------------------------------------|------|
| cis (des) | mit den relativen Schwingungszahlen | 25,2 |
| dis (es)  | „                                   | 28,5 |
| fis (ges) | „                                   | 34   |
| gis (as)  | „                                   | 38   |
| ais (b)   | „                                   | 42,5 |

ausgefüllt, wodurch die in halben Tönen vorschreitende chromatische Skala entsteht.

Zur Berechnung absoluter Schwingungszahlen geht man von der im Versuch festgestellten eines bestimmten Tones aus und findet die übrigen nach der umgekehrten Proportionalität der Schwingungszahlen zu den Saitenlängen. Man pflegt der Stimmung den Ton a zu Grund zu legen, welcher in der italienischen Oper zu Paris durch 424, in der komischen Oper durch 428, in der grossen Oper durch 431, in der Berliner Oper durch 437, in der Petersburger Oper durch 453 Schwingungen in der Sekunde erzeugt wird. Rechnet man als Mittelzahl 430, so ergeben sich für die Töne einer Oktave beziehungsweise die absoluten Schwingzahlen  $\bar{c}$  256,  $\bar{d}$  287,  $\bar{e}$  322,  $\bar{f}$  341,  $\bar{g}$  359,  $\bar{a}$  430,  $\bar{h}$  482,  $\bar{c}$  512. Stellen wir zwischen den relativen Schwingzahlen der Grundtöne geometrische Verhältnisse her, so steht

- 1)  $C : D = 24 : 27 = 8 : 9$
- 2)  $C : E = 24 : 30 = 4 : 5$
- 3)  $C : F = 24 : 32 = 3 : 4$
- 4)  $C : G = 24 : 36 = 2 : 3$
- 5)  $C : A = 24 : 40 = 3 : 5$
- 6)  $C : H = 24 : 45 = 8 : 15$
- 7)  $C : c = 24 : 48 = 1 : 2$

das einfachste Verhältniss liegt unter 7) vor und in der That besteht zwischen den darin gegebenen Oktavtönen der höchste Grad oder die Vollkommenheit der Konsonanz. Die nächst einfachsten und in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Relationen bestehen in 2) und 4) und die darin aufgenommenen Töne C E G bilden den als Grundlage der Harmonie giltigen grossen Dreiklang oder Durakkord. Während hier die beteiligten Töne das klare und einfache Verhältniss 4 : 5 : 6 darbieten, erscheint, wenn man E durch das um einen halben Ton erniedrigte es ersetzt, die Relation

$1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$ , welche das Schema des kleinen Dreiklanges, Mollakkord, darstellt.



Um die kleinen Differenzen der Intervalle und Schwingungszahlen zwischen den mathematischen Anforderungen und den musikalischen Ansprüchen des Gehörs zu lösen, vertheilte man sie in der sogenannten gleichschwebenden Temperatur gleichförmig auf alle Töne der Oktave. Das Verhältniss derselben zur älteren ungleichschwebenden des Kirnberger übersieht man aus den Angaben der für bestimmte Töne beziehungsweise nöthigen Saitenlängen. Wählen wir diejenige, welche in beiden Temperaturen den Ton c gibt, als Einheit, so hat man für die Töne:

cis in der *gleichschwebenden* die *Saitenlänge* 0,94387, in der *Kirnberger'schen*

|     |   |   |         |
|-----|---|---|---------|
|     |   |   | 0,94922 |
| d   | " | " | 0,89090 |
| dis | " | " | 0,84090 |
| e   | " | " | 0,79370 |
| f   | " | " | 0,74915 |
| fis | " | " | 0,70710 |
| g   | " | " | 0,66742 |
| gis | " | " | 0,62996 |
| a   | " | " | 0,59461 |
| b   | " | " | 0,56123 |
| h   | " | " | 0,52973 |
| c   | " | " | 0,5     |

Wenn in derselben Luftmasse eine ungestörte Superposition der von verschiedenen Punkten abgehenden Wellenzüge statt hätte, so müssten zwei gleichzeitig entstandene Töne von beliebigen Schwingzahlen selbständig und ohne Nebenerscheinung aufgefasst werden. Da aber in solchen Fällen gewöhnlich ein dritter Ton — der Kombinationston, Tartini'scher Ton — empfunden wird, für welchen keine unmittelbare objektive Quelle zu erkennen ist, so verlegte man dessen Entstehung und Schauplatz ausschliesslich in die subjektive Empfindungssphäre. Allerdings gibt es solche, für die eine physiologische Akustik die wesentliche Betheiligung des Trommelfelles im Ohr nachzuweisen wüsste, die meisten aber sind auf äussere Vorgänge zurückzuführen. Denn ist auch die erwähnte ungestörte Superposition der Wellenzüge den Schwingungen von unendlich kleiner Amplitude zu vindiciren, so entstehen doch bei grösseren Dimensionen neue kombinierte Schwingungssysteme, von denen die fraglichen Töne getragen werden. Wie jeder Luftpunkt, in welchem die primären Schwingungen eine gewisse Stärke erreicht haben, Centrum sekundärer Vibrationen für die häufig neben dem angeschlagenen Grundton vernommenen harmonischen Obertöne der Terz, Quinte und Oktave wird, so gilt jeder Luftpunkt, in welchem zwei coincidirende primäre Tonschwingungen sich verstärken, als Centrum sekundärer Wellen für den Kombinationston. Werden die beiden Töne  $\bar{f}$  und  $\bar{a}$  mit den beziehungsweise Schwingzahlen 341 und 430 gleichzeitig erzeugt, so fallen in



der Sekunde die Schallwellen  $430 - 341 = 89$ mal so zusammen, dass nach den Interferenzgesetzen eine Verstärkung erfolgt. Diese periodischen Verstärkungen treten als selbständiges Schwingungssystem ins Ohr und setzen in ihm die Empfindung eines tieferen Tones (nahezu G) von der Schwingungszahl 89. — Besteht eine so geringe Differenz der ursprünglichen Töne, dass die Verstärkungswellen in der Sekunde nicht die zum einheitlichen Eindruck eines Tones benötigte Anzahl erreichen, so gelangen sie einzeln zum Bewusstsein, als Anschwellungen, Stösse, wie man sie leicht hört, wenn zwei nahezu gleichgestimmte Saiten gleichzeitig angeschlagen werden.

2) Die Qualität des Tones, als Inbegriff all der theilweise unbeschreiblichen Eigenschaften, welche den Klang, den Charakter und einen Hauptfaktor seiner psychischen Einwirkungen machen, hängt hauptsächlich vom Material des tonerzeugenden und fortpflanzenden Körpers ab und wird hiermit von all den Verhältnissen modificirt, welche irgendwie die Beweglichkeit der Molekules und der dazwischen befindlichen Lufttheilchen beeinflussen. — Bezeichnet  $a$  die Maximalgeschwindigkeit eines schwingenden Punktes im Umfang seiner Bahn,  $n$  die Schwingungszahl in der Zeiteinheit,  $t$  die Zeitdauer eines besondern Falles, so variirt die Vibrationsgeschwindigkeit innerhalb einer Schwingung nach der Formel  $c = a \cdot \cos : nt$ , kann also mit dem Cosinus durch alle Werthe ständig wachsen und fallen. Hatte man in theoretischer Willkür angenommen, dass diese Formel das einzige Gesetz der Geschwindigkeitsvariation innerhalb einer Schwingungsperiode ausspreche, so behaupten wir vielmehr, dass unter Wahrung der Quantität des Tones entsprechenden Vibrationsperiodicität innerhalb der Schwingungsperiode selbst die Bewegung nach sehr mannigfachen, von grösstentheils unerörterten molekularen Eigenschaften der Stoffe abhängigen Gesetzen verlaufen könne und dass, wie von der zeitlichen und räumlichen Anordnung der Schwingungen die Quantität, so vom Bewegungsgang innerhalb jeder Schwingung die Qualität des Tones bedingt sei. — Man kann sich ferner vorstellen, dass von den zahlreichen Wellenzügen, welche von der Schallquelle aus sämtlich longitudinal in der nämlichen Hauptrichtung radial oder bei unendlicher Entfernung parallel laufen, jeder in einer Ebene sich windet oder die Succession seiner Verdichtungs- und Verdünnungsstellen setzt, welche zu der des nächsten parallel oder geneigt ist. Eine von unbekannten Motiven veranlasste Anordnung der mannigfachen Neigungen dieser Schwingungsebenen zum Parallelismus, welche wir aus Analogie zu einem optischen Vorgang als Polarisation des Schalles bezeichnen dürften, könnte vielleicht unter Umständen zur auffallenden



Reinheit und zu andren qualitativen Eigenthümlichkeiten manches Tones mitwirken.

3) Die Intensität des Tones hängt von der Intensität der Elementarschalle ab.

17. Sowohl bezüglich der Qualität als Intensität reichen die selbständig schwingenden tonerzeugenden Körper selten aus, um den quantitativ d. h. nach Höhe und Tiefe vollkommen bestimmten Ton in einer dem menschlichen Sinn angemessenen Fülle und Anmuth hervortreten zu lassen. Hier erweist sich das Princip der Thätigkeitsmittheilung vortheilhaft, vermöge dessen eine Kraft auf lange Zeit und weite Räume Widerstände zu bewältigen und Ruhendes zur Bewegung zu bringen vermag. Der Ton wird nämlich gestärkt und gefärbt, indem benachbarte oder mit der Tonquelle verbundene Körper die Tonwellen an ihrer Oberfläche empfangen und auf ihre eignen Molekules, sowie die dazwischen gelagerte Luft übertragen — Mitschwingung, Resonanz — durch welche synchrone Schwingungen der Effekt beträchtlich vermehrt wird. Die senkrechte Richtung der tonerzeugenden Schwingungen zur resonirenden Fläche wirkt hierbei günstig. — Uebrigens ist bei dieser akustischen Angelegenheit die Bedeutung des Massenübergewichtes zu erkennen. Während nämlich ein dichter tönender Körper eine ruhende Masse leicht zu synchronen Schwingungen bestimmt, wird von zwei in Berührung gebrachten schwingenden Körpern sehr ungleicher Massen immer der unbedeutendere zur allmäligen Annahme der Vibrationsperioden des gewichtigeren gezwungen.

18. Die Interferenz direkter und reflektirter Schallwellen unterhält stehende Schwingungen einer abgeschlossenen Luftsäule, aus denen sich die Töne musikalischer Blasinstrumente erklären. Ein Wellensystem, das an der offenen Mündung einer Röhre erregt wurde, verwandelt sich durch Reflexion an der hintren geschlossenen Wand in ein rückwärtsgehendes mit gleichen Dimensionen, indem der an der Wand in seiner Ausbildung gehemmte letzte Berg mittels entgegengesetzter Bewegung der schwingenden Partikeln in ein gleichgrosses Thal umschlägt. Dem Interferenzgesetz gemäss verstärken sich diese beiden Wellensysteme in bestimmten Punkten  $x, x,, x,,, \dots$  zu Bergen, in andren  $y, y,, y,,, \dots$  zu Thälern, während in einer dritten dazwischen vertheilten Folge von Punkten  $z, z,, z,,, \dots$  die beiden entgegengesetzten aber gleichen Exkursionen sich aufheben. So entsteht ein neues Wellensystem, in welchem die Punkte  $z, z,, z,,, \dots$  Schwingungsknoten, die zwischenliegenden Partien Bäuche heissen. Der erste Schwingungsknoten, die ruhende Stelle abwechselnder Luftverdichtung und Verdünnung, liegt um eine halbe Wellenlänge von der reflektirenden Wand entfernt. Bei regelmässig wiederkehrender An-



ordnung der übrigen Schwingungsknoten ist ihre beziehungsweise Entfernung von der Wand  $\frac{1}{2}l$ ,  $\frac{2}{2}l = l$ ,  $\frac{3}{2}l$ ,  $\frac{4}{2}l = 2l \dots$

Die Scheitelpunkte der Bäuche dagegen, in denen das Hin- und Hergehen der Lufttheilchen statthat, und innerhalb deren der Anschlag zur Tonerregung erfolgen muss, sind bei der gegebenen Lage der Knoten  $\frac{1}{4}l$ ,  $\frac{3}{4}l$ ,  $\frac{5}{4}l$ ,  $\frac{7}{4}l \dots$  von der hintren

Wand entfernt. Eine von den in den letzten Zahlen ausgedrückten Längen muss eine sogenannte gedeckte Pfeife (mit fester Seiten- und Hinterwand) haben, wenn in ihr stehende Schwingungen erzeugt werden sollen, welche einen Ton der Wellenlänge  $l$  geben. — Ist die Pfeife an beiden Enden offen, so tritt die vorn erregte Welle hinten eine Strecke weit in die freie Luft hinaus und wird von dieser so allmähig zurückgeworfen, dass das auf Grund der Interferenz gebildete Wellensystem von einem Punkt auszugehen scheint, welcher ungefähr eine viertel Wellenlänge über dem hintren freien Ende der Röhre hinausliegt. Indem auf diese Weise der Scheitelpunkt des ersten Bauches durch die Stelle, wo die hintre Wand sein sollte, bestimmt ist, der nächste Bauch und jeder folgende aber um eine halbe Wellenlänge vom vorigen absteht, so ergibt sich, dass in der offenen

Pfeife die Bäuche beziehungsweise  $\frac{1}{2}l$ ,  $\frac{2}{2}l = l$ ,  $\frac{3}{2}l \dots$

vom hintren Ende entfernt sind, und, da auch hier die Tonwellen innerhalb der Bäuche erzeugt werden müssen, für einen Ton der

Wellenlänge  $l$  die offene Pfeife  $\frac{1}{2}l$ ,  $l$ ,  $\frac{3}{2}l \dots$  überhaupt

also für dieselbe Tonhöhe doppelt so lang sein muss, als eine gedeckte. Von selber fliesst daraus, dass die Schwingungs-

knoten in den offenen Pfeifen die beziehungsweise Entfernung  $\frac{1}{4}l$ ,

$\frac{3}{4}l$ ,  $\frac{5}{4}l \dots$  vom hintren Ende haben. — Ist der Grundton  $l$ ,

so erzeugt man durch stärkeres Anblasen successive harmonische Obertöne, deren Schwingzahlen in gedeckten Pfeifen sich verhalten, wie  $1:3:5:7:9 \dots$  in den offenen wie  $2:4:6 \dots$

Uebrigens hat auch der Durchmesser der Röhre Einfluss, indem nachgewiesen wurde, dass die Tiefe des Tones mit der Weite der Pfeife zunimmt. Auch Elastizität, Feuchtigkeit und Weichheit der Wände bestimmen sowohl Quantität als Qualität desselben.

**19.** Bei den Saiteninstrumenten bildet jede durch Anschlagen oder Streichen bewirkte Transversalschwingung



der Saite Verdichtungswellen der Luft, welche synchrone Schwingungen der Massentheilchen des Resonanzboden erwecken, in welchem letztem der eigentliche Träger des Tones erkannt wird. Dass jedoch die Bewegung der Saite primäre Ursache des Tones ist, ergibt sich daraus, dass dessen wesentlicher Charakter: die Quantität, also die Anzahl seiner Schwingungen, bei gleichen atmosphärischen Verhältnissen in geradem Quadratverhältniss von der in Zuggewichten ausdrückbaren Spannung, und in verkehrtem von der Länge und Dichte der Saite abhängt.

Ausser den tonerregenden Querschwingungen können mittels Anstreichens unter sehr spitzem Winkel, oder Reiben einer Glasröhre in der Axenrichtung Longitudinalschwingungen und hiermit sogenannte Längentöne erzeugt werden, deren durch heftigeren Angriff hervorgelockten Obertöne zum Grundton im Verhältniss  $1:2:3:4\dots$  stehen. Ihre Beziehung zu den aus Querschwingungen hervorgehenden Tönen wird, wenn  $m$  und  $n$  die dem tiefsten Ton entsprechende Anzahl der Quer- und Längsschwingungen  $l$  die Saitenlänge,  $v$  die durch Spannung erlittene Verlängerung bedeutet, in der Formel  $m \sqrt{v} = n \sqrt{l}$  ausgedrückt und macht ein Stab von der Länge  $l$  und dem Durchmesser  $r$  bei eingeklemmtem Ende in derselben Zeit  $ml$  Querschwingungen, in welcher er bei Befestigung in der Mitte und freien Enden  $0,55958 \ n r$  Längsschwingungen vollendet.

Drehende Schwingungen entstehen, wenn cylindrische Körper in um die Achse laufenden Schraubenlinien gerieben werden. Der auf solche Weise einem Glasstab entlockte Ton verhält sich in seiner Schwingungszahl  $s$  zu der denselben Ton veranlassenden Querschwingzahl  $m$  wie 1 zu  $\sqrt{2,5}$ .

**20.** Eine eigenthümliche Tonerzeugung liegt in den Zungenpfeifen vor. Durch die Windröhre wird der Luftstrom eingeblasen. Das Zungenwerk besteht aus einer Rinne, auf welche eine dünne elastische Platte durch einen verschiebbaren gebogenen Draht bald in grösserer bald in geringerer Ausdehnung so aufgedrückt wird, dass sie theilweise verschlossen ist. Der durch Windröhre und Rinne heraufkommende Luftstrom versetzt in seinem Bestreben ins Freie zu gelangen die Zunge oder die angepresste Platte in Schwingungen, von deren Geschwindigkeit die Tonhöhe abhängt. Die Vibrationen, zwar der ganzen Masse nach von Aussen angeregt, verlaufen im molekularen Gefüge der Platte und werden desshalb von ihrer Elastizität bedingt. Wird oberhalb des Zungenwerks eine Ansatzröhre aufgeschraubt, so beeinflusst dieselbe je nach ihrer Länge nicht nur die Quantität des Tones, wie denn, wenn  $l$  die Wellenlänge des Grund-



tons des Zungenwerks und  $\frac{1}{2}l$  die Länge der Ansatzröhre ist, nach Aufschraubung der letzteren die tiefere Oktave des Grundtons erscheint, sondern auch die Art der Tonentstehung, indem dann die Bewegung der Zunge mehr vom Hin- und Hergang der Luftwellen in der Röhre abhängt, sonach die äussere Bewegung der ganzen Masse die molekularen Schwingungen überwiegt oder, in gewissem Sinn, die Platte mehr geschwungen wird, als selber schwingt.

**21.** Von ähnlicher Einrichtung sind die menschlichen Stimmwerkzeuge. Die aus den Lungen durch die Luftröhre heraufströmende Luft versetzt die im Kehlkopf ausgespannten verschiedener Tension fähigen Stimmbänder, welche die feine Stimmritze zwischen sich lassen, an ihren Rändern in Schwingungen, deren mit dem Spannungsgrad der Membranen und der Stärke des anstossenden Luftstromes zusammenhängende Anzahl die Quantität des Tones bestimmt, während dessen Qualität vornehmlich von den bei ihrer theils knorpeligen theils sehnigen Beschaffenheit leicht erzitternden Wänden der Luftröhre, vom Mitschwingen der oberen Kehlkopfpartien, von der Resonanz der Mund- und Nasenwandungen abhängt. Der Kehlkopfdeckel soll je nach seiner Stellung den Ton in jener eigenthümlichen Weise modificiren, welche man als Anschwellung bezeichnet. — Nach einer andern Ansicht ist die in den Athmungswerkzeugen enthaltene Luftsäule eigentlich tonerzeugend. Der durch den konstanten Druck der Brustmuskeln gleichförmig unterhaltene Luftstrom müsste durch die Unterbrechung oder vielmehr Einengung an der Stimmritze mit jener periodischen Geschwindigkeit begabt werden, welche tonerzeugende Verdichtungs- und Verdünnungswellen setzt. Der Ton, welcher demnach von der in Luftröhre und Kehlkopf schwingenden Luftsäule nach Art der Pfeifen erzeugt würde, wird verstärkt durch Uebertragung der zunächst von den Stimmritzbändern übernommenen Vibrationen auf Kehlkopf, Luftröhre und Lunge, und daran geknüpfte Erschütterung der in diesen Gebilden enthaltenen Luftmassen.

**22.** In der Schallaufnahme durch den Gehörsinn handelt es sich wesentlich um Uebertragung der Schallluftwellen in Vibrationen fester Gebilde, welche schliesslich in den Molekulan des Gehörnerven dem Gehirn vermittelt werden. Der normale Vorgang ist, dass die von der Ohrmuschel aufgefangenen, durch den äusseren Gehörgang dem Trommelfell zugeführten Schallwellen dieses in Schwingungen versetzen, welche sich wahrscheinlich sowohl den Molekulan als der ganzen Masse der Gehörknöchelchen übertragen. In der nach aussen vom Trommelfell abgeschlossenen,



mit den weiter nach innen gelegenen Räumen durch das runde und ovale Fenster kommunizirenden, mit dem Schlund mittels der Eustach'schen Röhre verbundenen Paukenhöhle liegen nämlich kleine knorpelige Körper, deren erster in Form eines Steigbügel an die Membran des ovalen Fensters gewachsen ist und durch hebelartige Einlenkung mittels des Linsenknöchelchen, des Amboses und Hammers mit dem Trommelfell in Verbindung steht. Der vom letzteren aus in Schwingungen gerathene Steigbügel dringt vielleicht periodisch in das ovale Fenster und erregt so im Wasser des aus Vorhof, halbkreisförmigen Kanälen und Schnecke gebildeten Labyrinthes abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, welche den Gehörnerv durch stossweise Kompression und Wiederausdehnung in die dem Gehirn zu übermittelnden Schwingungen versetzen. Aus anatomischen Gründen ist in schwächerem Grad eine Aufnahme und Mittheilung der Schallschwingungen durch die Kopfknochen und von den Zähnen aus durch den Mund möglich.

### Beispiele.

1. Welche Länge hat eine Welle, welche bei einer Oscillationszeit von 2,3 Sekunden eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 34'' hat?

$$34 : 1 = x : 2,3$$

$$x = 78,2''.$$

2. Welchen Ton gibt eine beiderseits befestigte Klaviersaite von der Länge 0,5825 Meter unter einer Spannung von 14363 Gr., wenn 3,4 Meter der Saite 5,385 Gr. wiegen?

$$n = \sqrt{\frac{S}{l} \cdot \frac{g}{p}} = \sqrt{\frac{14363 \cdot 9,81}{0,5825 \cdot 0,92258}} = 512 = \bar{c}$$

$$3,4 : 5,385 = 0,5825 : x, x = 0,92258.$$

3. Wie gross ist die Schallgeschwindigkeit im Wasserstoff, wenn eine mit Wasserstoff angeblasene 2' lange offene Pfeife den Ton  $\bar{h}$  gibt?

$$\bar{h} = \frac{15}{8} \cdot 512 = 960$$

$$\text{Länge der offenen Pfeife} = \frac{1}{2} l, \text{ folglich } l = 4'$$

$$\text{Geschwindigkeit} = 960 \cdot 4 = 3840' \text{ in 1 Sekunde.}$$



## IX.

## Molekularbewegungen.

1. Anziehung und Bewegung scheinen wie im Gesamthaushalt der Natur, so auch innerhalb jedes einzelnen Körpers die Grundformen zu sein, in denen die Materie ihre Lebensthätigkeit äussert. Newton, welcher der Welt mechanische Gesetze gab, sprach sich dahin aus, Vieles veranlasse ihn zu glauben, dass alle Erscheinungen von gewissen Kräften abhängen, durch welche die kleinsten Theile der Körper aus noch unbekannten Ursachen entweder gegeneinander getrieben, oder zu gegenseitiger Flucht und Entfernung bestimmt würden, deren Wirkungen und Gesetze aber in derselben Art der Beweisführung aus den Principien der Mechanik abzuleiten seien, wie er dies für die Himmelskörper gezeigt habe.

Folgende Sätze mögen als Grundlagen einer künftigen Molekularmechanik gelten. — Die Materie ist in ihren Erscheinungsformen begründet durch die beständige Thätigkeit der nach allen Raumrichtungen wirksamen Kräfte der Anziehung und Abstossung, aus deren verschiedenen Verhältnissen alle Körperunterschiede hervorgehen. — Die Wirksamkeit der Molekularkräfte wird in jeder messbaren Entfernung Null, steht aber innerhalb der atomistischen Intervalle wahrscheinlich in verkehrtem Verhältniss zu den Quadraten — vielleicht auch höheren Potenzen der Entfernungen. — Molekularanziehung und Abstossung sind verschieden normirte Funktionen der Entfernungen der aufeinanderwirkenden Punkte. Statt mit Poissin auch die Repulsivkraft in die Moleküle selbst zu verlegen, kann man mit Cauchy annehmen, dass je zwei Körperpunkte sich anziehen, je zwei Aetherpunkte sich abstossen, je ein Körper und Aetherpunkt aber sich anziehen. —

2. Wie in der Schöpfung mehrere individuelle Körper in ein mechanisches System und diese Systeme wieder in ein grösseres Weltganze vereinigt sind, so tritt eine gewisse Anzahl von Atomen in bestimmter jedem besondern Körper eigenthümlicher Anordnung zu einem Atomencomplex, dem Molekül, zusammen, welches in seiner Gestalt die wesentlichen Eigenschaften jedes Körpers bedingt. Sind in jedem Molekül eines Körpers die Molekularanziehungen in übereinstimmenden Richtungen besonders ausgesprochen und in konstanten Winkeln dazu um gleichviel grösser oder kleiner, so prägt sich die hiermit allen Molekülen desselben Körpers gesicherte ähnliche Form in den Umrissen des Gesamtkörpers aus und er erscheint in stereometrisch regelmässigen Krystallen, welche nicht nur für alle Stoffe von gleicher, sondern nach den Gesetzen der Isomorphie auch für viele von ähnlicher



chemischer Zusammensetzung sich wiederholen. — In den meisten Fällen ist das Vorwalten der im Bildungsprocess der Körper thätigen Molekularattraktion nach drei Hauptrichtungen merklich, welche als Achsen in den daraufgegründeten Krystallsystemen eine wichtige Rolle spielen. Man unterscheidet hier 1) das Würfelsystem, reguläres System, gleichgliedriges System, in welchem die drei Achsen gleich sind und aufeinander senkrecht stehen. So erscheint das Steinsalz in Würfeln. 2) Das Quadratsystem, Pyramidalsystem, viergliedriges System. Zwei Achsen sind gleich und stehen, auch unter sich einen rechten Winkel bildend, auf der dritten Achse senkrecht, welche länger oder kürzer ist, als eine der erstren. In der hierher gehörigen Tetragonalpyramide krystallisirt das Gelbleierz. 3) Das Rhombensystem, prismatisches System, zwei und zweigliedriges System. Die drei Achsen stehen zwar aufeinander senkrecht, sind aber sämmtlich ungleich. Die gerade rhombische Säulenform liebt der Schwerspat. 4) Das Klinorhombensystem, hemiprismatisches System, zwei und eingliedriges System. Von den unter sich ungleichen Achsen stehen zwei aufeinander senkrecht, die dritte aber bildet mit ihnen einen schiefen Winkel. Kalifeldspat krystallisirt in schiefer rhombischer Säule. 5) Das Klinorhomboidensystem, tetartoprismatisches System, ein und eingliedriges System. Von den ungleichen Achsen steht keine auf der andern senkrecht. Kupfervitriol nimmt die klinorhomboidische Säule gern an. — Seltener sind vier Richtungen der molekularen Attraktionsthätigkeit erkenntlich, von denen dann die eine so überwiegt, dass sie die Bildung einer Hauptachse veranlasst. Diese steht im so begründeten 6) Hexagonalsystem, rhomboëdrisches System, drei und dreigliedriges und sechsgliedriges System, auf den drei andern zugleich senkrecht, und ist grösser oder kleiner als sie. Diese drei Achsen aber sind einander gleich und bilden, in einer Ebene liegend, Winkel von 60 Grad. Hierher gehören die Rhomboëderformen des Kalkspat und die sechsflächigen Säulen der Bergkrystalle.

3. Wird das Gleichgewicht innerhalb des Molekuls, von dessen Stabilität der Bestand der physikalischen und chemischen Eigenschaften eines Körpers abhängt, gestört, so kann es geschehen, dass die Qualität — die chemische Zusammensetzung — dieselbe bleibt und doch der Körper ein verändertes Verhalten gegen andre Substanzen und überhaupt eine Modifikation seiner physikalischen Beziehungen zeigt. Solch eine molekulare Umgestaltung, wie wir den Differenzen zwischen aktivem



und passivem Sauerstoff zu unterstellen geneigt sind, heisst Allotropie. Die isomeren, polymeren und metameren Thatsachen der organischen Chemie sind vielleicht auf ähnliche Verhältnisse zurückzuführen. In leicht zersetzlichen chemischen Verbindungen herrscht gewissermaassen ein labiles molekulares Gleichgewicht. Die atomistische Anordnung innerhalb jedes Molekules wird rasch aufgegeben, fremde Atome treten zu einer neuen zusammen, und es gestalten sich so in molekularmechanischer Weise die Resultate der chemischen Affinität, der einfachen und doppelten Wahlverwandtschaft. — In diesem Sinn sind die chemischen Akte nur besondere Fälle der Wirksamkeit der als allgemeine Eigenschaft der Materie anzuerkennenden Kraft, welche bei unendlicher Annäherung der kleinsten Theilchen ungleichartiger Stoffe einen Wechsel in der molekularen Anordnung hervorzubringen, oder gegen solche Modifikationen einen Widerstand zu äussern pflegt. Eine wirkliche chemische Verbindung ist nur möglich, wenn die molekulare Anziehung ungleichartiger Materie, welche wir Affinität nennen, alle Widerstände der Cohäsion, der Aetherrepulsion oder Wärme, der elektrischen Polarität zu bewältigen vermag; sonst treten anderweitige Erscheinungen und Bewegungsformen hervor, wie sie namentlich an Flüssigkeiten unter sich oder auch in Bezug auf feste Körper wahrgenommen werden. —

4. Während im Innern einer für sich betrachteten kugelförmigen Flüssigkeit jedes Atom nach allen Seiten durch die Molekularattraktion gleichstark beschäftigt ist und ebendesshalb die einzelnen Tröpfchen leicht übereinander verschiebbar sind, erleiden die Moleküle der Oberfläche einen einseitigen Zug nach Innen und bilden daher eine Art von Netz, welches die beweglicheren Innenpartien umspannt und als Flüssigkeitshäuten bezeichnet wird. Dasselbe macht sich auch an den freien Oberflächen grösserer Flüssigkeitsmassen bemerklich und bewirkt, dass leichte Körper, wie Insekten, Erdstückchen, Nähnadeln, solange noch keine Benetzung der ganzen Masse eintrat, auf dem Wasserspiegel gehen oder schwimmen, ob schon sie schwerer sind, als die Flüssigkeit.

5. Die molekulare Adhäsion, welche bei inniger Berührung heterogener Körper statthat, welche z. B. zwischen Glas und Wasser stark genug ist, die Cohäsion des letzteren zu besiegen und unter Aufhebung seines Zusammenhanges es am Glas anhängen zu machen, ist Ursache der merkwürdigsten und wichtigsten Erscheinungen. Kleine Körper, welche auf Flüssigkeiten schwimmen, bilden, wenn Adhäsion besteht, um sich einen erhöhten Wulst, sonst unter sich eine kugelige Vertiefung. Zwei adhäreirende Kugeln nähern sich und bilden einen gemeinsamen Wulst der Flüssigkeit um sich;



ebenso vereinigen sich die vertieften Lager der nicht adhären- den Stoffe. Dagegen entfernen sich ein adhären- des und ein nicht adhären- des Körperchen voneinander. Reine Platten, senkrecht ins Wasser gehängt, nähern sich einander, wenn zwischen ihnen und dem Wasser Adhäsion besteht. — Zwischen zwei sehr nah beisammen- stehenden parallelen oder schief geneigten reinen Glasplatten steigt Wasser zu einer den äusseren Spiegel um so mehr übertreffenden Höhe, je geringer der Abstand der Adhäsionsplatten ist. Eine noch grössere Steighöhe wird erreicht, wenn statt der Platten ein enges Glasröhr- chen eingetaucht wird, von welcher Form das ganze Phänomen die Bezeichnung: Haarröhrchenanziehung — Kapillarität — erhielt. Die Materie des Glases an sich gehört nicht zu den we- sentlichen Ursachen, vielmehr genügt jede enge Röhre aus einer Sub- stanz, zu welcher die Flüssigkeit überhaupt adhärirt, worunter organische Kanäle, jedoch nicht wegen der stofflichen Eigen- thümlichkeit, sondern der ausserordentlich kleinen Durchmesser sich sehr auszeichnen. Ueberhaupt ist die Materie der Röhre ebenso wenig von Einfluss, als deren Wanddicke, welch letztrer Umstand recht verdeutlicht, dass hier die in messbaren Dimensionen thätige Massenanziehung gar nicht ins Spiel kommt, sondern eine Molekularwirkung vorliegt. Dagegen steht die Steighöhe in ver- kehrtem Verhältniss zum Durchmesser der Röhren. Auch bei Platten ist dies Verhältniss nachweisbar; weil hier aber der Kanal auf irgend einer Seite offen, in den cylindrischen Röhrchen dagegen ringsum geschlossen ist, so wird im ersten Fall immer nur eine geringere Höhe erreicht und überdies bei spitzwinkliger Neigung der Platten die verschiedene Leistungsfähigkeit der einander näheren oder ferneren Punkte an der hyperbolischen Begrenzung der gehobenen Wasserfläche erkannt. Schon Laplace zeigte die höhere Steigsäule in Cylinderkanälen und berechnete sie doppelt so hoch, als die zwischen Parallelplatten. Neuerdings bestätigt sich dies entgegen der Behaup- tung, das genauere Verhältniss werde durch die Hälfte der Ludolf'- schen Zahl 3,1415 ausgedrückt. Bei wachsender Temperatur nimmt die kapillare Steighöhe ab, was bereits 1768 Lalande bemerkte, in neuerer Zeit aber präciser dahin formulirt wurde, dass das umgekehrte Verhältniss der Höhe der Kapillarsäule zur Höhe der Temperatur anfangs ein einfaches sei, über 1000 jedoch die erstre in grösseren Sprüngen sinkt, als die letztre steigt, und dass der Rechnung nach Wasser bei 536° Aether bei 191,12° C. seine Kapillarität ganz verlöre.

In einer Glasröhre von 1 Millimeter Durchmesser ist die Höhe der Kapillarsäule für Wasser 30,7 Millimeter, Schwefel- säure 20,12, Alkohol 12,4, Aether 10,8.

Die Schnelligkeit des kapillaren Ansteigens steht



ebenfalls zum Röhrendurchmesser in umgekehrtem Verhältniss.

Von höchster Wichtigkeit für die theoretische Erklärung der Kapillarität ist die Gestalt des freien Endes der Kapillarsäule. Schon in grösseren Glasgefässen steht das Wasser an der Peripherie etwas höher als in der Mitte der Fläche, weit auffälliger aber wird diese konkave Fläche der adhären den Flüssigkeit in den engen Kapillarröhren. Diese Fläche erscheint im Allgemeinen als Halbelipsoid und bleibt im Wesentlichen vom Temperaturwechsel unabhängig. Wie das Steigen der Kapillarsäule überhaupt als eine Abweichung vom hydrostatischen Gesetz der kommunizirenden Röhren erscheint, so die konkave Begrenzung als eine Ausnahme von den freien horizontalen Oberflächen. Dieselbe Kraft besiegt in beiden Fällen an einzelnen Punkten die Schwere. In einem weiten Gefäss ist die adhäsive Anziehung der Wände gegen die Flüssigkeitsmoleküle nicht er giebig genug, deren gegenseitige Cohäsion und ihre Gesamtschwere soweit zu überwinden, dass, abgesehen von der geringen die konkave Fläche bedingenden Hebung an den Rändern, ein der allgemeinen Anziehung widersprechendes Phänomen einträte. In einer engen Röhre dagegen ist an sich schon das Verhältniss der Fläche zum körperlichen Inhalt ein mächtigeres und ausserdem der dem Lumen entsprechende Flüssigkeitsfaden von so unbedeutender Masse, dass die Adhäsion der peripherischen Schicht an dem Mantel des Cylinders nebst der jetzt in gleichem Sinn wirkenden Cohäsion der übrigen Wassermasse das herabziehende Bestreben der Schwere aufheben kann. Wird eine äusserst dünne, etwa nur von einfachen Atomen gebildete Cylinderringschicht des Wassers unmittelbar an der Glaswand gehoben, so bewirkt ihre Massenanziehung gegen die nächstgelegenen Wassermoleküle eine Bewegung derselben nach Aufwärts, welche jedoch wegen des Einflusses der unteren grösseren Flüssigkeitsmasse nicht die Höhe der äussersten von der Adhäsion gehaltenen Schicht erreicht. So entsteht ein ebenfalls atomistisch dünner, mit dem äusseren konzentrischer, etwas niedrigerer Wassercylinderring, welcher auf die nämliche Weise einen dritten zu noch geringerer Erhebung bringt, bis die leisen Abstufungen gegen den am niedrigsten stehenden achsialen Wasserfaden eine Konkavität der oberen Grenze der gehobenen Flüssigkeitsäule erzielt haben, welche um so entwickelter sein wird, je mehr die Moleküle des festen und flüssigen Stoffs im Verhältniss zur Röhrenenge im Stand waren, ihr adhäsives und in der Folge das cohäsive Verhalten an sehr vielen einander nahen Berührungspunkten geltend zu machen. — Während an einer horizontalen Wasserfläche jedes Theilchen, da der anziehenden Kraft der unteren Wassermasse keine gleichartige Anziehung nach

de9b : de

ap : qeap : qeap :

de9b : de9b : de9b :



oben entspricht, einen Zug nach unten erleidet, welcher für zwei Partikelchen, unter denen eine gleichtiefe Flüssigkeitsäule ruht, völlig gleich ist, wird dieses Gleichgewicht augenblicklich aufgehoben, wenn von dem nach unten ziehenden Druck an einer Stelle etwas weggenommen wird, z.B. dadurch, dass eine das allgemeine Niveau überragende Wasserschicht nach aufwärts zieht. In diesem Fall befindet sich der Mittelpunkt der am Anfang des engen Röhrchens entstandenen Konkavität. Nennen wir die Adhäsion des Röhrenstoffs zur Flüssigkeit  $x$ , die Schwere der gehobenen Wassersäule  $y$  und die Anziehung derselben von Seite der darunter befindlichen Flüssigkeitsmasse  $z$ , so erscheint  $x$  als eine Funktion der Anzahl der zwischen Glas und Wasser möglichen Berührungspunkte, ist also dem Röhrenhalbmesser  $r$  und dem Adhäsionscoëfficienten  $m$  proportional oder  $= 2 r \pi . m$ . Die in dieser Formel für die Adhäsion an einem Kreisdurchschnitt der Röhre ausgedrückte Kraft kommt zweimal zur Erweisung: an der mit dem äusseren Flüssigkeitspiegel in einer Ebene gelegenen Grundfläche des kapillaren Wassercylinders und an dessen oberer freier Fläche, zwischen welchen beiden äusseren Grenzen jedes Wassertheilchen wegen der nach unten und oben gleichstarken Anziehung im Gleichgewicht steht; somit ist obige Formel zu verdoppeln und dann zu  $y$  und  $z$  in Relation zu setzen.  $y$  wird gemessen durch das Produkt des körperlichen Inhalts der gehobenen Säule von der Höhe  $h$  und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit  $s$ ,  $y = r^2 \pi . h . s$ ,  $z$  aber wird bestimmt durch die Anzahl der an einem gegebenen Flüssigkeitsring vorhandenen Anziehungspunkte und dem Cohäsionscoëfficienten  $n$ ,  $z = 2 r \pi . n$ . Für das Gleichgewicht hat man

$$4 r \pi . m = r^2 \pi h s + 2 r \pi . n$$

$$4 m = r h s + 2 n$$

$$h = \frac{4 m - 2 n}{r s} = 2 \frac{2 m - n}{r s} \text{ d. h., die}$$

Steighöhe steht in verkehrtem Verhältniss zum Durchmesser der Röhre und zur Dichte (Concentration) der Flüssigkeit, aber in geradem zur Differenz zwischen den Coëfficienten der Adhäsion und Cohäsion. — Zum

Eintritt eines wirklichen Steigens muss  $m > \frac{1}{2} n$  sein, weil nur

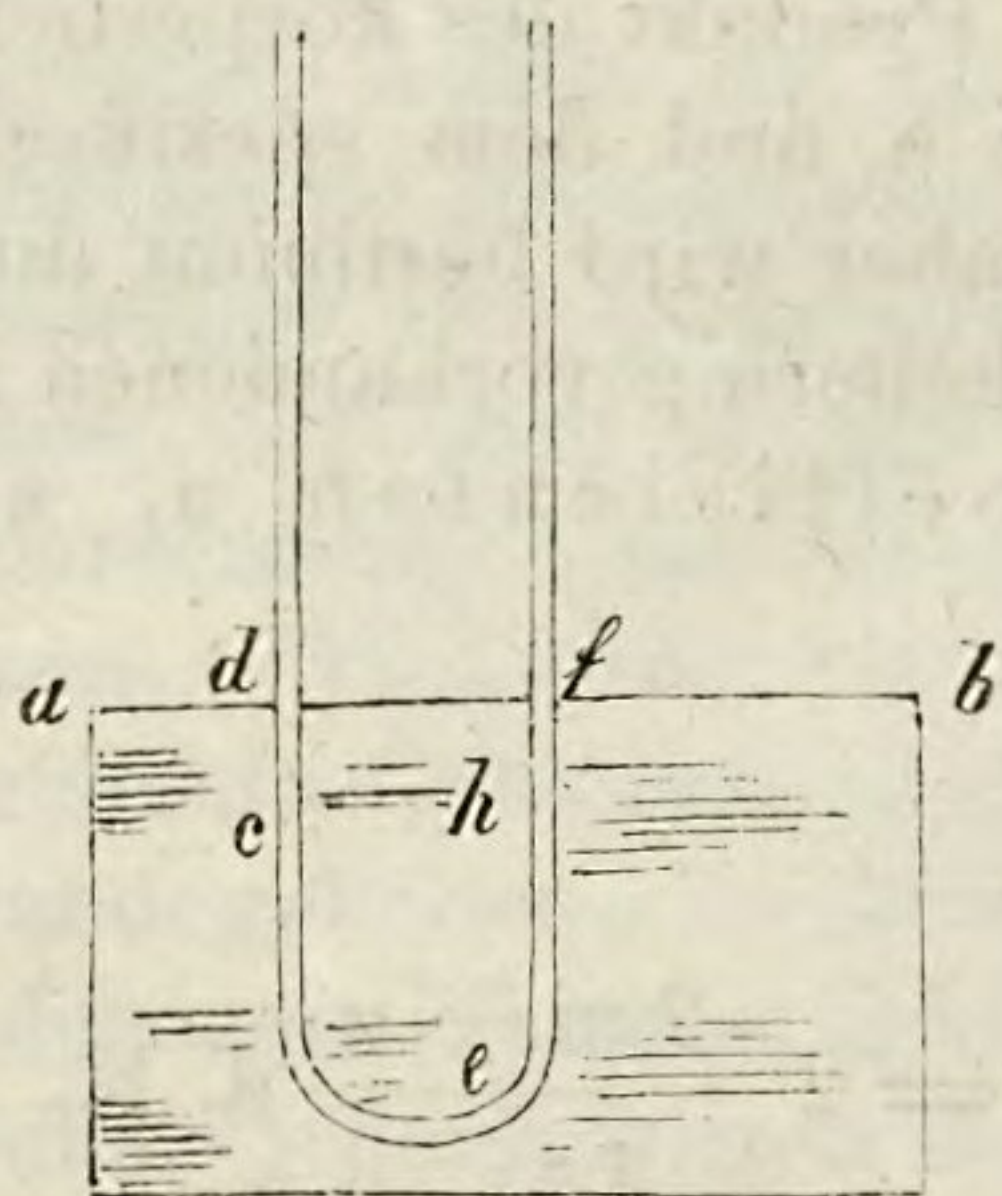
dann die Rechnung einen positiven Werth gibt. In allen Fällen also, wo die Adhäsion eines festen und flüssigen Stoffes grösser ist, als die Hälfte der Cohäsion zwischen den Theilchen der letzteren, findet ein Benetzen des erstren und unter geeigneten Umständen ein kapilläres Ansteigen statt. Beträgt die Adhäsion gerade die Hälfte der Flüssigkeitscohäsion,



so herrscht absolutes Gleichgewicht, denn für  $m = \frac{1}{2}n$  wird der Werth von  $h$  Null. Endlich ist für  $m < \frac{1}{2}n$  der Ausdruck negativ, d. h., in Fällen, wo die Adhäsion eines festen Körpers zu einer Flüssigkeit kleiner ist, als die Hälfte des Cohäsionsbestrebens dieser ist der Flüssigkeitsstand innerhalb des bis jetzt als Schauplatz zur Bethätigung der Adhäsion betrachteten Raumes niedriger als aussen. Dieser Fall der deprimirenden Kapillarität kommt zwischen Quecksilber und Glas zur Beobachtung. Die Oberfläche ist hier, wie auch, wenn in grössere Glasgefässe Quecksilber gegossen wird, konvex, d. h., der mittlere Scheitel des freien Quecksilberspiegels steht höher, als der den Gefässwänden anliegende periphere Theil.

Bezüglich der Differenz der innren und äussren Standhöhe besteht zwar auch eine Abhängigkeit vom Röhrenradius, jedoch kaum in dem einfachen Zahlenverhältniss, wie bei der hebenden Kapillarität. Hier spielt wahrscheinlich das ober-

Fig. 47.



flächliche Flüssigkeitshäutchen eine Rolle. Man kann annehmen, dass dasselbe dem Eindringen des Quecksilbers in das enge Röhrenlumen widersteht, weil dadurch dem von ihr repräsentirten Streben der mit starker Molekularattraktion ausgerüsteten Flüssigkeit zur Kugelform Abbruch geschähe. Durch folgende Betrachtung gewinnt man ein Maass dieser Spannung. Im weiten Gefäss steht das Quecksilber bis a b, in einem eingetauchten geraden engen Röhrchen bildet es bei c einen konvexen Scheitel.

Denkt man sich das Lumen der Kapillarröhre in der Richtung e f gebogen und verlängert, so hält nach dem hydrostatischen Princip der communicirenden Röhren die Flüssigkeitsmasse c e h, wenn c h horizontal läuft, sich in vollkommenem Gleichgewicht, der Quecksilbersäule h f aber wirkt bei c, weil c d nicht von Quecksilber erfüllt ist, nichts entgegen, als der Druck der Luftsäule c d — denn der übrige allgemeine Luftdruck herrscht auch bei f — und die Spannung des von der engen Röhre nicht zerrissenen Flüssigkeitshäutchens, welche sonach gleich ist dem Druck der Quecksilbersäule f h weniger dem Druck der Luftsäule c d.

Findet man häufige Gelegenheit, an natürlichen und künstlichen



Einrichtungen und Vorgängen die Betheiligung der Kapillarität zu erläutern, so bieten sich doch die schönsten Schauplätze ihrer Wirksamkeit in dem feineren Bau der organischen Geschöpfe dar, in den sehr engen Gefässen der Pflanze und in den thierischen Geweben. Hier gibt es Röhrendurchmesser von 0,2 bis 0,005 Millimeter, die Röhrenwände selbst sind porös, fast immer gleichmässig durchfeuchtet, und dem leisesten Druck vorübergehend nachgebend. Dazu kommt, dass die Schwankungen der thierischen Wärme, womit vielerlei Abwechslungen in Schwere, Dichtigkeit und Ausdehnung der betheiligten Körper beilaufen, ein äusserst glücklich angebrachtes Movens in Fällen abgeben, wo es sich um Durchgang von Flüssigkeiten durch feine Röhren handelt, indem die Durchflussmenge von 0° bis 37,5° C. um 2,5738 steigt. Neben den Vorgängen in den feinsten Verzweigungen der Blutgefässe und den Kanälen mancher Drüsen ist die Thätigkeit der Haut, die Ernährung der Haare, Horn und Knochengebilde, die Feuchterhaltung der vorderen äusseren Augenfläche von der Kapillarität in hohem Maass abhängig.

6. Wie die Adhäsion ein Effekt der Molekularanziehung zwischen einander innigberührenden heterogenen Stoffen festen oder festen und flüssigen Aggregatzustandes ist, so ergeben sich auch interessante molekularmechanische Erscheinungen zwischen Flüssigkeiten, deren Verwandtschaft nicht stark genug ist, sie in eine chemische Verbindung zu bringen, wohl aber jene internen Bewegungen zu veranlassen und zu unterhalten, deren Resultat eine gleichmässige Mischung der verschiedenen Stoffe wird. Diese sogenannte Diffusion der Flüssigkeiten äussert sich am einfachsten, wenn die Flüssigkeiten, vorsichtig übereinander geschichtet, einander unmittelbar berühren. War auch die leichtere oben angebracht, so dass die Erdanziehung keinen Anlass hätte, die Ruhe zu stören, so ergeben sich alsbald Strömungen, deren schliesslicher Effekt die gemeinsame Mischung ist, deren Energie und Verlaufsschnelligkeit aber von der Ausdehnung der Berührungsfläche von der Temperatur und von der Differenz, welche im spezifischen Gewicht und in der chemischen Zusammensetzung der betheiligten Flüssigkeiten statthat, in geradem Verhältniss abhängt. Unter den Modalitäten, welche hierbei obwalten, sind die häufigsten, dass zwei vorher selbständig gewesene Lösungen verschiedener fester Stoffe ineinander diffundiren, oder dass eine Salzlösung in reinem Wasser sich verbreitet, oder dass eine Lösung einer festen Substanz oder mehrerer im Wasser erzielt wird. Auch kann sein, dass zwischen einem festen und flüssigen Körper solche Molekularattraktionen sich entfalten; zunächst wird schon eine gewisse Verwandtschaft vorausgesetzt, wenn



Flüssigkeiten sich mit Vorliebe auf den Oberflächen fester Körper niederschlagen, welche, wenn es sich um eine derartige Erscheinung hinsichtlich der atmosphärischen Feuchtigkeit handelt, als hygroskopische bezeichnet werden. Weil namentlich thierische Gewebe, auf die es hier besonders abgesehen ist, die feinsten Poren und Kanäle besitzen, so tritt zum einfachen Niederschlag eine Aufsaugung, welche, eigentlich ein Kapillari tätsphänomen, den Beweis einer innigeren Molekularattraktion zwischen festem und flüssigem Stoff liefert. Hier kann nur soviel beigebracht werden, dass die Flüssigkeit nicht nur in die weiteren, wenn nicht dem blossen Auge, doch dem Mikroskop erkenntlichen Intervalle der organischen Fasern tritt, sondern auch jene Interzellularräume aufsucht, welche zwischen den einzelnen Molekülen bestehen. Weil in letztem Fall eine weit innigere Berührung von fester und flüssiger Materie statthat, so wird auch eine weit höhere und ausdauerndere Attraktionsintensität erzielt, mit welcher dieser Theil der imbibirten Flüssigkeit auch dann noch festgehalten wird, wenn die in den erstgenannten Hohlräumen befindliche durch äussere Kräfte ausgepresst wird. Ferner erkennt man hier die Molekularattraktion, im Gegensatz zur allgemeinen Schwere, als eine wählerische, indem vorerst überhaupt schon die Beschaffenheit der Flüssigkeit Grösse und Art der Erscheinung bedingt, dann aber auch von der wässerigen Lösung eines Salzes die Moleküle des letzteren mit soviel geringerer Kraft von den festen Zellen und Fasern angezogen werden, als diejenigen des Wassers, dass die Mitte jedes mit imbibirter Flüssigkeit gefüllten Hohlraumes als concentrirte Lösung erscheint, die dem organischen Stoff unmittelbar anliegende dagegen verdünnt oder wässerig.

7. Die Thatfachen der unmittelbaren Diffusion und der Imbibition kombiniren sich in einem Vorgang, welchen Fischer und Dutrochet als Endosmose und Exosmose in die Wissenschaft einführten. Wir verstehen darunter die Bewegung zweier verschiedener Flüssigkeiten durch eine poröse Scheidewand gegeneinander, bis ihre Differenzen zur völligen Ausgleichung gebracht sind. Die verschiedene Qualität oder Concentration der beiden Flüssigkeiten, wie Eisenchlorid und Schwefelcyankalium, Wasser und Alkohol, Kupfervitriol und Wasser, welche in jenem Verwandtschaftsgrade stehen müssen, welcher, wenn keine chemische Verbindung, doch eine molekularmechanische Durchdringung verlangt, bestimmt durch die Grösse ihrer Differenz im geraden Verhältniss die Energie des endosmotischen Austausches. In zweiter Linie ist die Beschaffenheit der Scheidewand von hoher Bedeutung. Ungebrannter Thon, Gyps, Eiweisspfropfe, besonders aber thierische



Membranen, wie Harnblase, Darmstückchen, Bauchfellüberzug der Leber oder anderer Unterleibsorgane empfehlen sich zu den Versuchen, weil sie dicht genug sind, das Durchsickern der Flüssigkeit, sowie die Fortpflanzung des hydrostatischen Druckes zu verhüten, aber zugleich porös genug, das kapillare Eindringen der beiderseitigen Fluida zu veranlassen. Es entsteht aber die Frage, wodurch der anderseitige Austritt der Flüssigkeit, welchen der in andren Fällen sehr wirk-same mechanische oder durch Verdunstung an der freien Oberfläche hervorgerufene Druck in Ermangelung geeigneter Umgebung nicht einleiten kann, erfolge, denn der Molekularattraktion der heterogenen Flüssigkeitstheilchen darf diese Leistung nicht ausschliesslich zugeschrieben werden, weil dieselbe noch innerhalb der Interzellularräume eine den betheiligten kleinen Mengen entsprechende Befriedigung empfängt. Es scheint aber, dass die hiermit angeregte und eingeleitete Ausgleichung chemischer oder molekularmechanischer Differenzen auch in den entfernten Massen ein gleichartiges Streben erweckt und dadurch von beiden Seiten her überschüssige Anziehungen ins Treffen geführt werden, welche die adhäsive Neigung der Membran, die imbibirte Flüssigkeit in ihren Poren festzuhalten, besiegen. Die Membran selbst beweist ihre lebhaftete Mitbetheiligung durch molekulare Schwingungen, in denen wahrscheinlich ihre Poren abwechselnd sich zusammenziehen und ausdehnen. Nicht nur ihre Qualität ist auf Gang und Schnelligkeit der Endosmose von Einfluss, sondern es kommt selbst darauf an, welche Seite der einen oder andern Flüssigkeit zugekehrt ist, indem die Richtung der überwiegenden Ströme dadurch bestimmt wird. Weil die Endosmose nie einseitig verläuft, sondern dem Strome immer ein Gegenstrom entspricht, so lässt sich der Vorgang an Dütrochets Endosmometer, welches nur die relative Volumzunahme der einerseitigen Flüssigkeit misst, weit unsicherer verfolgen, als nach der Methode von Jolly, in welcher die mit einer Blase verschlossene Röhre, die auf ihr endosmotisches Verhalten zu prüfende Flüssigkeit enthaltend, in destillirtes Wasser taucht, das von Zeit zu Zeit und zwar so lang abgelassen und durch reines ersetzt wird, bis die Lösung in der Röhre völlig verschwunden und an ihre Stelle destillirtes Wasser getreten ist. Kennt man das Gewicht der geprüften Lösung und des dafür eingetretenen Wassers, so lässt sich berechnen, wie viele Gewichttheile Wasser für ein Gewichttheil (Gramm) der geprüften Substanz im endosmotischen Austausch eingetreten ist. Dieses Verhältniss zwischen der herüber- und hinübergehenden Salz- und Wassermenge nannte Jolly das endosmotische Aequivalent und glaubte, dass es unter sonst gleichen Umständen eine konstante Grösse sei. Jedoch scheint auf diese Zahlen, deren wir einige anführen, Concentration



der Flüssigkeit, der Wechsel der Scheidewand, die Temperatur und der Umstand nicht ohne Einfluss, ob die Salzlösung oder das Wasser die obere Stelle einnahm, indem in letztem Fall mehr Salz durchgeht, als in erstem.

Endosmotisches Aequivalent für

|                     |           |
|---------------------|-----------|
| Schwefelsäure       | 0,39      |
| Alkohol             | 4,1       |
| Kochsalz krystall.  | 4         |
| Kochsalzlösung      | 1,4 — 3,6 |
| Zucker              | 7,2       |
| Glaubersalz         | 11        |
| Schwefelsaures Kali | 12,7.     |

Können von derselben Seite zwei in ein Gemeng vereinigte Lösungen endosmotisch diffundiren, so behauptet Clötta, dass, wenn  $m$  und  $n$  die beziehungsweisen endosmotischen Aequivalente der Bestandtheile,  $a$  und  $b$  aber die im Versuch beziehungsweise übergegangenen Mengen sind, das Aequivalent des Gemenges durch die Formel  $\frac{ma + nb}{a + b}$  ausgedrückt wird. — Was die Geschwindigkeit des endosmotischen Austausches anlangt, so wird, da es sich wesentlich um Ausgleichung der chemischen und molekularmechanischen Differenzen zweier Flüssigkeiten handelt, dieselbe durch die Scheidewand um so mehr verzögert werden, je enger deren Poren sind. Zum Werth des endosmotischen Aequivalents wird ferner die Ausgleichungsdauer in geradem Verhältniss stehen; denn die hohen Zahlen des erstren bedeuten nichts Andres, als dass beträchtliche Wasserströme gegen unbedeutende Salzmengen diffundiren, wodurch die einerseitige Lösung zwar rasch verdünnt, aber auch das anderseitige Wasser nur sehr langsam mit dem Salz geschwängert wird; Uebereinstimmung der beiderseitigen Fluida wird weit leichter und schneller erzielt, wenn die gegenseitigen Strömungsmengen nicht viel differiren, das endosmotische Aequivalent also der Einheit nah steht. — Endlich geht die Endosmose um so rascher vor sich, je grösser die chemische Differenz der beiden Flüssigkeiten ist.

Der Endosmose sind in den Organismen äusserst wichtige Aufgaben zugewiesen und deshalb zur Verbürgung ihres lebhaften Fortganges die günstigsten Verhältnisse geboten. So ist an den meisten Stellen ihrer Bethätigung nicht nur eine nicht kleine chemische oder Concentrationsdifferenz der betheiligten Flüssigkeiten vorhanden, sondern es ist durch beständige Bewegung der einen dafür gesorgt, dass dieser der Endosmose so günstige Gegensatz der chemischen Zusammensetzung oder der Dichte nicht zu früh abgeschwächt



werde. Doch ist hierbei zu berücksichtigen, dass die Schnelligkeit des bewegten Fluidums keine allzugrosse sein darf, indem bei einer die Diffusionsgeschwindigkeit übertreffenden Bewegung ein Theil der Flüssigkeit ungenützt vorüberreilen würde. — Auch sind die organischen Scheidewände trefflich eingerichtet, denn schon der anatomische Bestand der meisten thierischen Gewebe zeigt uns, dass die adhäsiven Anziehungen, welche wir als Grundbedingungen der Endosmose erkannten, zwischen festen Elementen und Flüssigkeitsmolekülen in so hohem Grad walten, dass dieselben fast immer in durchfeuchtetem Zustand verbleiben. — Endlich mag die thierische Wärme, sowie die aus häufigen chemischorganischen Akten freiwerdende Elektrizität nicht unbedeutlichen Einfluss auf die Erhaltung und stets frische Anregung der endosmotischen Vorgänge haben. — Der Haupt-schauplätze organischer Endosmose erwähnen wir drei: die Aufsaugung der verflüssigten Bestandtheile des Speisebreies mittels der Darmzotten, welche von dünnwandigen Lymphgefässen und Venen durchzogen zu Millionen von der Darmschleimhaut aus in das die verflüssigten Speisen enthaltende Lumen hineinragen, der Austritt der Ernährungsflüssigkeit aus den alle Gewebe umspinnenden Haarblutgefässen, nebst der Aufsaugung aufgelöster plastischer Elemente, endlich die Absonderung gewisser theils weitere Aufgaben im Organismus erfüllenden, theils zu entfernenden, dem eigentlichen Lebensprocess bereits entfremdeten Flüssigkeiten durch die Drüsen. In den beiden letzten Fällen erregt es nicht geringe Bewunderung, dass mit der Endosmose das feinste Wahlvermögen verknüpft scheint, denn jedes Organ entnimmt dem Blut nur jene Stoffe, welche den seinigen gleichartig zum Wiederersatz und Neubau des Verbrauchten geeignet sind, und jede Drüse zieht die Bestandtheile gerade in jenem Verhältniss heraus, dass durch ihr Zusammen- und Gegeneinanderwirken ganz besondere Sekrete von der charakteristischen Eigenthümlichkeit, wie Milch, Galle, Speichel, Harn entstehen. Das Gesetz der Anziehung und Anhäufung gleichartiger Massen und der Einladung zu gleichartiger Thätigkeit, sowie der qualitativ alterirende oder modificirende Einfluss der vielleicht manchmal nur in der Bethätigung physikalischer Agentien begründeten Differenzen der endosmotischen Membran sind die Momente, auf welche eine Untersuchung dieses Gegenstandes ihr Augenmerk zu richten hätte. — Im Pflanzenleben spielt die die Zellenwandungen durchsetzende Endosmose der Ernährungs- und Absonderungsflüssigkeiten ebenfalls eine für ihr Leben unentbehrliche Rolle.

8. In den Gasen wird das Gesetz, dass der schwerere Körper die unterste Stelle einnimmt und der leichtere darüber steigt, nur kurze Zeit eingehalten; bald tritt das Bestreben der allseitigen Verbreitung hervor, und zwar nicht nur, wenn dem Gase der leere



Raum zur Verfügung steht, nicht nur, wenn es andre Gase unmittelbar berührt, sondern auch, wenn es von festen Wänden umschlossen ist. Eine am Boden eines Glases gelagerte Kohlensäureschicht entweicht, obschon ihre Dichte diejenige der Luft um die Hälfte übertrifft. Wasserstoff kann selbst in Flaschen, deren untere Mündung, indem der Boden nach oben gekehrt ist, unter Quecksilber von der Luft völlig abgeschlossen ist, nicht lang aufbewahrt werden. Jedes Gas ist für sich so selbständig, als ob jedes andre benachbarte gar nicht da wäre. Die Moleküle heterogener chemischindifferenten Gase verbreiten sich ohne irgend eine gegenseitige Einwirkung zwischen einander. Jedes Gas übt dabei seine eigenthümliche Expansivkraft aus und die Summe aller einzelnen gibt den Druck des Gemisches. Dieselbe Unabhängigkeit der Expansivkraft von der Anwesenheit oder Dichtendifferenz eines chemischindifferenten Gases zeigen auch die Dämpfe, welche schon bei gewöhnlicher, noch mehr bei erhöhter Temperatur, aus tropfbaren Flüssigkeiten aufsteigen, indem deren Expansivkraft bei gleicher Temperatur nur von ihrer eigenen Dichte, also dem darauf lastenden Druck, und bei gleichem Druck von der Temperatur in geradem Verhältniss abhängt. So ist der Druck des Wasserdampfes bei 13° R. und 28'' Barometerstand  $\frac{1}{56}$  des Luftdruckes,

und dieser Werth bleibt im luftleeren wie luftverdichteten Raum ungeändert. Dieses Dalton'sche Gesetz gilt auch für Mischungen zweier einander nicht auflösender Dämpfe, wie Schwefelkohlenstoff und Wasserdampf, während nach geschehener Verbindung die Expansivkraft des entstandenen Dampfes geringer ist, als die Summe der Spannkraft der Componenten.

9. Beim Austausch verschiedener Gase durch poröse Scheidewände beobachtet man zwar auch eine der Endosmose der Flüssigkeiten analoge Verschiedenheit der beiderseitigen Durchströmungsgeschwindigkeiten, aber es ergibt sich, dass hier nicht die für die Endosmose so lebhaft hervorgehobene molekularattraktive Betheiligung der Scheidewand von Einfluss ist, sondern dass die diffundirten Volumina blos in verkehrtem Verhältniss zu den Quadratwurzeln der Dichten stehen.

Gase diffundiren auch in Flüssigkeiten, indem sich die Moleküle der erstren zwischen diejenigen der zweiten lagern und mit einer gewissen Gewalt festgehalten werden, so dass unter veränderten Umständen zwar ein Theil der absorbirten Luftart entweicht, eine kleinere Partie derselben darin suspendirt bleibt. Die wesentlich beeinflussenden Momente der Absorption sind Temperatur und Druck, denn die absorbirte Menge, welche in erster



Instanz von der Natur der Flüssigkeit wie des Gases bestimmt wird, nimmt mit der Temperatur der absorbirenden Flüssigkeit ab und ist bei gleicher Temperatur dem Druck proportional. Der Absorptionscoëfficient, womit Bunsen das auf 0° Temperatur und 76 Centimeter Barometerstand reducirte Gasvolum bezeichnet, das von der Volumeinheit der Flüssigkeit unter Einem Atmosphärendruck absorbirt wird, ist für Kohlensäure 1,7967, Stickstoff 0,20346, Wasserstoff 0,0193, Sauerstoff 0,41149 und wird für erstre in der Temperatur von  $t^0$  aus der Formel  $1,7967 - 0,07761t + 0,0016424t^2$  gefunden.

Mittels des Absorptionsphänomenes ist eine physikalische Gasanalyse möglich. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Absorptionscoëfficienten zweier Gase unter 76 Centimeter Quecksilberdruck, und ist das Gesamtvolum ihres Gemisches unter dem Druck  $P$   $V$ , so kann, nachdem dasselbe mit Wasser vom Volum  $h$  bis zu vollständiger Absorption geschüttelt wurde, das Gasvolum  $V$ , unter dem Druck  $P$ , stehen. Wenn ferner das unbekannte Volum des einen Gases unter der Einheit des Druckes  $x$  heisst, hiervon aber als unabsorbirt nur  $x$ , übrig blieb, so übt letzteres im Raum  $V$ , den Druck  $d : 1 = x : V$ ,  $d = \frac{x}{V}$  und wurde sonach von ihm laut des Absorptionsgesetzes

$\frac{x}{V} \alpha h$  absorbirt. Die Summe dieser absorbirten Menge und des unabsorbirten Volums muss dem ursprünglichen freien Volum gleichen

$$x = x + \frac{x}{V} \alpha h$$

$$x V = x V + x \alpha h \quad x = \frac{x V}{V + \alpha h}.$$

Setzt man diesen Werth in die Formel für den Druck  $\frac{x}{V}$  ein, so

kommt  $d = \frac{x V}{V + \alpha h} : V = \frac{x}{V + \alpha h}$ . — In gleicher Weise

bedeute  $y$  das unbekannte Volum des zweiten Gases und  $y$ , die rückbleibende nicht absorbirte Menge desselben, so übt letztere in dem nach der Absorption dem Gasgemisch zukommenden Raum  $V$ , den

Druck  $d = \frac{y}{V}$ , wurde also in der Menge  $\frac{y}{V} \beta h$  absorbirt und

ist  $y = y + \frac{y}{V} \beta h$ , woraus  $y = \frac{y V}{V + \beta h}$ , folglich  $d =$

$\frac{y}{V + \beta h}$ . Weil endlich die Summe der beiden Druckkräfte  $d$  und

$d$ , den Gesamtdruck des Gasgemisches nach der Absorption  $P$ , gibt,



das erste Gas ferner, dem wir unter dem Druck 1 das Volum  $x$  zuschrieben, unter dem Druck  $P$  das Volum  $\varphi$ :  $x = 1 : P$   $\varphi = \frac{x}{P}$

und dergleichen das zweite  $\frac{y}{P}$  annimmt, die Summe dieser beiden Volumina aber dem gegebenen Volum der Mischung  $V$  gleicht, so stehen die beiden Gleichungen  $P, = \frac{x}{V, + \alpha h} + \frac{y}{V, + \beta h}$  und

$V = \frac{x}{P} + \frac{y}{P}$  aus denen  $x$  und  $y$  zu bestimmen sind.

$$\begin{aligned} P, (V, + \alpha h) (V, + \beta h) &= (V, + \beta h) x + (V, + \alpha h) y \\ \frac{P, (V, + \alpha h) (V, + \beta h)}{V P (V, + \alpha h)} &= \frac{(V, + \beta h) x + (V, + \alpha h) y}{(V, + \alpha h) x + (V, + \alpha h) y} \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} P, (V, + \alpha h) (V, + \beta h) - V P (V, + \alpha h) &= \\ x (V, + \beta h - V, - \alpha h) & \\ x &= \frac{(V, + \alpha h) (P, V, - P V + P, \beta h)}{h (\beta - \alpha)} \\ &= \frac{(V, + \alpha h) (P V - P, V, - P \beta h)}{h (\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P, (V, + \alpha h) (V, + \beta h) &= x (V, + \beta h) + y (V, + \alpha h) \\ \frac{P V (V, + \beta h)}{P V (V, + \beta h)} &= \frac{x (V, + \beta h) + y (V, + \beta h)}{x (V, + \beta h) + y (V, + \beta h)} \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} P, (V, + \alpha h) (V, + \beta h) - P V (V, + \beta h) &= \\ y (V, + \alpha h - V, - \beta h) & \\ y &= \frac{(V, + \beta h) (P, V, - P V + P, \alpha h)}{h (\alpha - \beta)} \\ &= \frac{(V, + \beta h) (P V - P, V, - P, \alpha h)}{h (\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Auch zwischen die Moleküle fester, namentlich poröser Körper werden Gase geschluckt, und zeichnet sich hierin Kohle aus, welche in einem mit dem zu absorbirenden Gas gefüllten Gefäss emporsteigt, nachdem sie im Sperrquecksilber abgelöscht ward. 1 Raumtheil derselben verschluckt 1,75 Stickstoff, 9,25 Sauerstoff, 35 Kohlensäure, 65 schweflige Säure, 85 Chlorwasserstoffgas, 90 Ammoniak. — Temperatur und Druck stehen zur Absorption in der Beziehung, dass dieselbe beim Steigen der erstren vermindert wird und unter schwächerem Druck dem Volum nach mehr, dem Gewicht nach weniger Gas verschluckt zu werden pflegt. Selbst an den glattesten Oberflächen äussert sich diese Molekularwirkung zwischen festen und gasförmigen Stoffen, indem sich an ihnen eine verdichtete Gasschicht lagert, welche nur schwer und auf kurze Zeit entfernt werden kann. Der die Entzündung begünstigenden Wasserstoffver-



die Dichtung in feinertheiltem Platinmor verdankt die Döbereiner'sche Zündmaschine ihre Wirksamkeit. Hierher gehören die Moser'schen Hauchbilder. Eine polirte Metall- oder Glasplatte zeigt, nachdem ein Stempel darauf stand oder in geringer Entfernung darüber gehalten wurde, beim Behauchen die deutliche Gravirung desselben, und eine Glastafel behält die mittels eines leicht hingleitenden Holzstäbchens angedeutete Zeichnung. Auf einer polirten Platte, welche einige Zeit mit einem von ausgeschnittenen Figuren durchbrochenen Papierschirm bedeckt war und vor dessen Wegnahme behaucht wurde, prägen sich die ausgeschnittenen Zeichnungen sehr erkenntlich aus. Waidele bringt diese Erscheinungen mit der That- sache in Zusammenhang, dass jede Fläche von einer verdichteten Gasschicht umgeben ist. Zwischen den erhabenen Stellen des Stempels und der Platte geht ein anderer Verlauf molekularer Attraktionen in diesen Gasatmosphären vor sich, als innerhalb der Vertiefungen, und kann dadurch ein so verschiedener Zustand der Oberfläche hergestellt werden, dass eine beziehungsweise stärkere und schwächere Condensirung der angehauchten Wasserdämpfe Platz greift. Geschah, wie im letzten Versuch, das Behauchen vor Wegnahme des durchbrochenen Schirmes, so konnten sich an den bedeckten Stellen keine Wasserdämpfe niederschlagen, und bleibt deshalb die Gasschicht der Platte an diesen Stellen unverändert, während der an den offenen Partien abgesetzte Wasserdampf im Wiederverdunsten die Gasmoleküle mit emporreisst.

### Beispiele.

1. Wie hoch ist die kapillare Steighöhe destillirten Wassers in einem Glasröhrchen von 0,5 Millimeter Halbmesser, wenn der relative Adhäsionscoëfficient zwischen Glas und Wasser 4, der Cohäsionscoëfficient des letzteren aber 0,5 ist?

$$h = 2 \frac{2 \cdot 4 - 0,5}{0,5} = 30 \text{ Millimeter.}$$

2. Man beobachtet, dass 6 Centimeter einer Salzlösung nach vollendeter endosmotischer Diffusion durch 7,8 Centimeter destillirten Wassers ersetzt wurden. Wie gross berechnet sich hieraus ihr endosmotisches Aequivalent, wenn sie das spezifische Gewicht 2,7 hat?

$$\begin{array}{l} 6 \cdot 2,7 = 16,2 \text{ Gramm ausgetretene Lösung} \\ \quad \quad \quad 7,8 \quad \quad \quad \text{„ eingetretenes Wasser} \\ 16,2 : 7,8 = 1 : x \quad \quad x = 0,482. \end{array}$$

3. Welches Volum atmosphärischer Luft diffundirt in bestimmter Zeit gegen das Einheitvolum Chlorgas?

$$\sqrt[3]{2,47} = 1,571.$$



4. Welches Volum Stickstoff absorbirt das Einheitvolum Kohle bei 20° Temperatur?

$$0,20346 - 0,00053887 \cdot 20 + 0,000011156 \cdot 400 = 0,197145.$$

## X.

### Aetherbewegungen.

1. Viele Naturerscheinungen lassen sich auf die mechanischen Eigenschaften und Wechselwirkungen der festen, flüssigen und gasförmigen Körper nicht zurückführen. Man erklärte sie deshalb für Erweisungsarten besondrer Stoffe, denen zum Unterschied von der gewöhnlichen den Sinnen unmittelbar zugänglichen Materie das Prädikat der Unwägbarkeit ertheilt wurde. Die imponderable Existenz der Lichtmaterie, des Wärmestoffes, der magnetischen und elektrischen Flüssigkeiten ist der neueren Physik sehr zweifelhaft geworden. Viele Thatsachen und die Analogie mit den übrigen Formen der Naturanschauung sprechen dafür, dass ein Aether im leeren Raum und zwischen den Molekülen der Körper verbreitet sei, an Feinheit alle bekannten irdischen Stoffe übertreffend, jedoch nach bestimmten mechanischen Gesetzen verlaufender Bewegungen fähig, welche als Träger des Lichtes und der Wärme ungefähr in ähnlicher Weise erscheinen, wie die Luftschwingungen uns den Schall vermitteln. Magnetismus und Elektrizität sind bis jetzt der Aethervibrationstheorie weniger zugänglich gewesen.

2. Ein Aetherpunkt erscheint leuchtend, wenn von ihm bis in unser Auge Schwingungen mit bestimmter Geschwindigkeit fortgepflanzt werden, welche zu der zwischen beiden gedachten Geraden — dem Strahl — senkrecht gehen. Die geradlinige Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Vibrationen beträgt, wie von der Astronomie gelegentlich der Aberration des Lichtes und der Verzögerung des Schatteneintrittes der Jupitermonde mit überraschender Uebereinstimmung nachgewiesen wurde, 42100 Meilen für die Sekunde. Da das Licht vom leuchtenden Punkt aus nach allen Richtungen kugelradienartig verbreitet wird, so ist aus Früherem klar, dass die Lichtintensität in umgekehrtem Verhältniss zum Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle steht. Ausserdem hängt sie ab von der Vibrationsintensität im leuchtenden Punkt, von der Anzahl der leuchtenden Punkte oder der Ausdehnung des licht-



strahlenden Körpers, und vom Sinus des Neigungswinkels, welchen die beleuchtete Fläche gegen den Hauptstrahl macht. Geht die Reihe der Schwingungen eines Lichtstrahles auf einen Körper über, so wird das Licht entweder in regelmässigen Richtungen zurückgeworfen, oder unregelmässig zerstreut (diffuses Licht), oder innerhalb des Körpers ganz oder theilweise aufgehoben (Lichtabsorption) oder von seinem Wege abgelenkt oder sonstwie modificirt. Von einem ebenen Spiegel wird der Lichtstrahl unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchem er einfällt. Elliptisch, parabolisch oder sphärisch ausgeschliffene Spiegel bieten den einfallenden Strahlen entweder eine konkave oder eine konvexe Fläche dar. Strahlen, welche den Hohlspiegel parallel mit seiner Achse treffen, werden so zurückgeworfen, dass sie sich im Brennpunkt vereinigen. Bedeutet  $f$  die Brennweite eines sphärischen Spiegels, welche nah die Hälfte des Radius ist, womit seine Kugelfläche beschrieben wurde, und  $a$  die Entfernung eines leuchtenden Punktes, so ist die Vereinigungsweite  $e$  der von diesem Punkt ausgehenden und von der konkaven Spiegelfläche reflektirten Strahlen  $\frac{af}{a-f}$ .

Dieser Werth wird für  $a = \infty$ ,  $e = \frac{\infty \cdot f}{\infty - f} = \frac{\infty \cdot f}{\infty} = f$  d. h.,

Strahlen, welche von einem unendlich entlegenen Punkt kommen, und desshalb der Hauptachse parallel laufen, werden im Brennpunkt des Spiegels vereinigt. Das Umgekehrte tritt ein, wenn  $a = f$  ist,

nämlich  $e = \frac{af}{0} = \infty$  d. h., die von einem im Brennpunkt stehenden Lichtpunkt an der Konkavfläche zurückgeworfenen Strahlen gehen

parallel mit der Achse fort. Für  $a = 2f$  wird  $e = \frac{a^2}{2 \left( a - \frac{a}{2} \right)} =$

$\frac{a^2}{a} = a$  d. h., wenn der leuchtende Punkt im Centrum des Hohl-

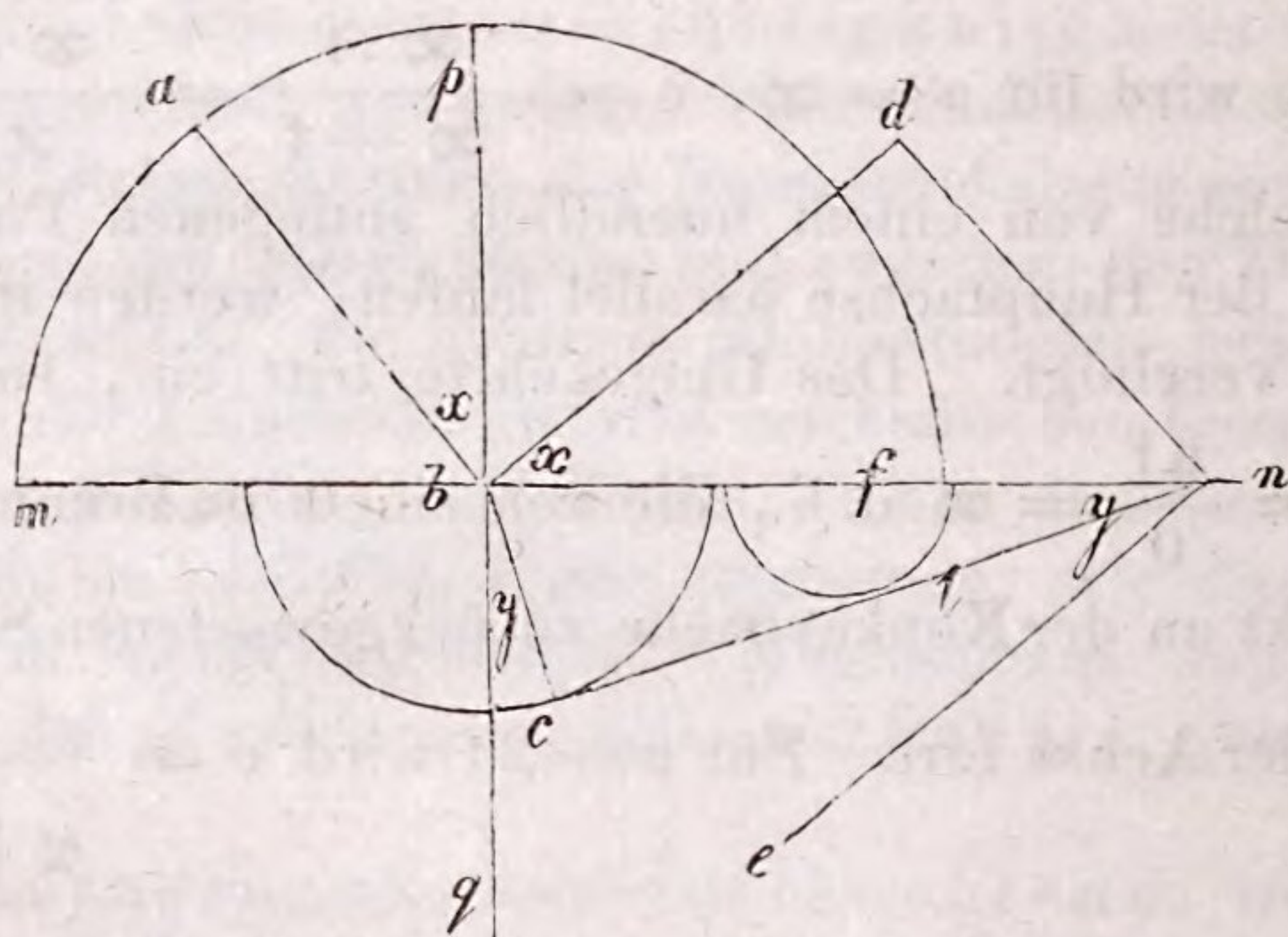
spiegels steht, werden alle Strahlen nach der Zurückwerfung sich im Entstehungspunkt wieder vereinigen. Liegt der leuchtende Punkt zwischen dem Brennpunkt und dem geometrischen Centrum, ist also  $a < 2f$  aber  $> f$ , so entsteht jenseits des Centrums ein verkehrtes vergrössertes Bild. Befindet sich dagegen der lichtgebende Körper jenseits des Centrums, also  $a > 2f$  aber  $< \infty$ , so spiegelt sich zwischen Centrum und Brennpunkt ein verkleinertes Bild ab. Ist endlich  $a < f$ , so wird der Werth von  $e$  negativ d. h., wenn der leuchtende Gegenstand der Spiegelhohlfläche näher steht, als der Brennpunkt, so divergiren die reflektirten Strahlen, es kommt in Ermangelung



ihres Durchschnitts zu gar keinem physischen Bild vor dem Spiegel, sondern nur zu einem sogenannten geometrischen, an der Stelle, wo die rückwärts verlängert gedachten divergierenden Strahlen sich schnitten. — Wird den von einem unendlichfernen Lichtpunkt herkommenden Parallelstrahlen eine konvexe Spiegelfläche dargeboten, so werden sie divergierend zurückgeworfen. Man nennt den Punkt, in welchem sich die rückwärts verlängerten reflektirten Strahlen schneiden würden, Brennpunkt des Convexspiegels. Da dieser hinter demselben liegt, so ist dessen Brenn-

weite  $f$  negativ und wird  $e = -\frac{af}{a+f}$  d. h., die Lichtstrahlen werden für jede Entfernung des leuchtenden Punktes so zurückgeworfen, dass sie von einem hinter dem Spiegel liegenden Punkt zu kommen scheinen. — Ein Lichtstrahl, welcher von einem Mittel auf ein andres durchsichtiges so übergeht, dass seine Richtung mit der Berührungsfläche der beiden lichtleitenden Stoffe verschiedener Dichte einen schiefen Winkel macht, wird von seinem Weg abgelenkt, gebrochen, was daher rührt, dass er sich nicht in beiden Substanzen

Fig. 48.



mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt. — Sei  $mn$  eine Trennungsfläche zweier Medien und  $ab$  ein unter dem Winkel  $abm$  einfallender Lichtstrahl, dessen beziehungsweise Geschwindigkeit in beiden Körpern dadurch ausgedrückt wird, dass im oberen in gleicher Zeit die Lichtwelle vom Radius  $ba$  entstände, in welcher im untren diejenige vom Halbmesser  $bc$  vorschreitet, so wird die zu ihm senkrechte Welle  $bd$  im oberen Medium in der Zeiteinheit den Weg  $dn = ab$  durchschreiten, während der in  $b$  geschehene Anstoss in derselben Frist die Lichtwelle vom Radius  $bc$  und der um die halbe Zeit später in  $f$  geschehende, wenn  $bf = \frac{1}{2} bn$  nur eine Welle vom Halbmesser



$f l = \frac{1}{2} b c$  erregt. Berücksichtigt man in ähnlicher Weise die in der Zeiteinheit successive auf der Punktfolge  $b n$  entstandenen Wellen, so stellt deren Tangentialfläche  $c n$  die Welle vor, welche in derselben Zeit im unteren Medium vorgeschritten ist, in der bei gleichbleibendem (oberen) Mittel die Lichtwelle  $b d$  bis  $e n$  ( $\pm b d$ ) gekommen wäre. Die zu  $c n$  senkrechte Linie  $b c$  stellt nun den Weg des gebrochenen Strahles vor, welcher dem Loth  $p q$  zufällt, wenn die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung im neudargebotenen Medium grösser ist, als im ursprünglichen, dagegen vom Loth abspringt, wenn das umgekehrte Geschwindigkeitsverhältniss besteht. Weil

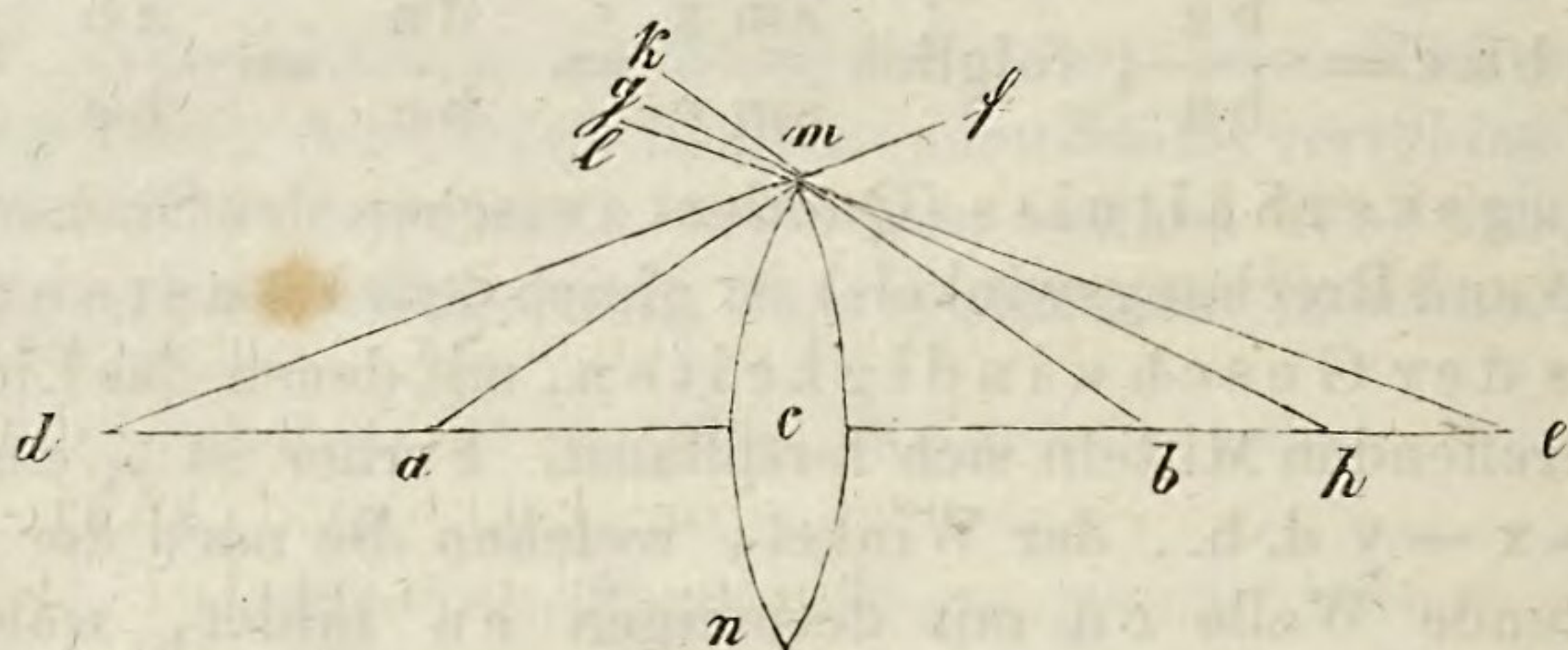
$$\angle x = \angle d b n \text{ und } \angle y = b n c, \text{ so ist } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin d b n}{\sin b n c} \cdot \sin d b n = \frac{d n}{b n}, \sin b n c = \frac{b c}{b n}, \text{ folglich } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{d n}{b c} = \frac{a b}{b c} \text{ d. h., das}$$

Brechungsverhältniss (Quotient zwischen den Sinusen des Einfallswinkels und Brechungswinkels) ist gleich dem konstanten Verhältniss der Geschwindigkeiten, mit denen das Licht in den beiden betreffenden Mitteln sich fortpflanzt. Ferner ist  $\angle c n e = b n e - b n c = x - y$  d. h., der Winkel, welchen die nach der Brechung fortschreitende Welle  $c n$  mit derjenigen  $e n$  bildet, welche ohne Brechung resp. Verzögerung vorgeschritten wäre, ist gleich dem Ablenkungswinkel. Dieser, oder die Ablenkung, wird bei demselben Brechungsverhältniss um so kleiner, je grösser  $b n c$  oder je kleiner der Einfallswinkel ist. — Geht der Strahl durch zwei oder mehrere verschiedene Mittel, deren Berührungsflächen parallel sind, so bleibt seine Richtung nach dem letzten Austritt derjenigen vor dem ersten Eintritt parallel; sind aber die Trennungsflächen gegeneinander geneigt, so treten Modifikationen des Weges ein. Am wichtigsten sind die Schicksale des gebrochenen Strahles in den Linsengläsern, worunter man von Kugeloberflächen begrenzte durchsichtige Körper versteht und auf deren Kombination die Mikroskope und Fernrohre beruhen. Man unterscheidet bikonvexe, plankonvexe, konvexkonkave, bikonkave, plankonkave und konkavkonvexe, von denen je die drei ersten und letzten eine Hauptgattung ausmachen. Ein Lichtstrahl, welcher in der Richtung der Hauptachse die Mitte der gewölbten Fläche eines Konvexglases trifft, geht ungebrochen durch, alle mit ihm parallelen Strahlen aber werden im Glas so abgelenkt, dass sie hinter dem Glas in einem gemeinsamen Punkt, dem Brennpunkt, dessen Entfernung vom geometrischen Centrum der Linse deren Brennweite bestimmt, vereinigt werden. Umgekehrt gehen die Strahlen, welche im Brennpunkt einer Konvexlinse erregt auf diese fallen, nach der Brechung parallel



mit der Hauptachse fort, während Strahlen, welche von einem Lichtpunkt kommen, der der Linse näher liegt, als ihr Brennpunkt, nach der Brechung divergiren. In letztem Fall gelangen die von einem System leuchtender Punkte einem Körper ausgesandten Strahlen so in das jenseits der Linse befindliche Auge, dass dieses ein Bild des Gegenstandes unter beträchtlicherem Sehwinkel, also vergrößert, erblickt. In einem konkaven Glas werden die Parallelstrahlen so zur Divergenz gebracht, dass sie bei der Rückwärtsverlängerung in einem idealen Brennpunkt sich schneiden. Konkavgläser vereinigen überhaupt nach der Brechung die Strahlen nicht wieder. Gegenstände erscheinen durch sie unter verkleinertem Gesichtswinkel.

Fig. 49.



Auf die Linse  $mn$ , deren Begrenzungsflächen mit den Radien  $ac = am$  und  $bc = bm$  beschrieben sind, fällt der Strahl  $dm$  und werde von Luft in Glas nach  $me$  von Glas wieder in Luft aber nach  $mh$  gebrochen. Weil man im Allgemeinen nahezu annehmen darf, dass  $dm = dc$   $me = ce$   $mh = ch$ , so ergibt sich, wenn man  $dc$  die Entfernung des leuchtenden Punktes mit  $a$ ,  $ce$ , die Vereinigungsweite nach der Brechung von Luft in Glas mit  $v$ ,  $ch$ , die Vereinigungsweite nach der zweimaligen Brechung mit  $x$ , die Flächenradien  $ac$  und  $bc$  beziehungsweise mit  $r$  und  $R$ , endlich das Brechungsverhältniss von Luft in Glas mit  $n$  bezeichnet, folgende Entwicklung.  $dm : db$

$$= \sin dbm : \sin dmb, be : me = \sin bme : \sin mbe, n = \frac{\sin dm k}{\sin bme}$$

$$\frac{\sin dmb}{\sin bme}, \text{ woraus } \frac{dm}{db} \cdot \frac{be}{me} \cdot n = \frac{\sin dbm \cdot \sin bme \cdot \sin dmb}{\sin dmb \cdot \sin mbe \cdot \sin bme}$$

$$= 1 \text{ oder } \frac{a}{a + R} \cdot \frac{v - R}{v} \cdot n = 1, \text{ folglich } \frac{an}{a + R} = \frac{v}{v - R},$$

$$\frac{anv - anR}{a + R} = v$$

$$anv - av - Rv = anR$$

$$v = \frac{anR}{(n - 1)a - R}.$$



Um die Vereinigungsweite  $x$  für die zweite Brechung von Glas in Luft zu finden, ist statt  $v$ , —  $x$ , statt  $a$ ,  $v$ , statt  $R$ ,  $r$ , statt  $n$ ,  $\frac{1}{n}$

$$\text{zu setzen, wonach } -x = \frac{v \cdot r \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) v - r}, \quad \frac{1}{x} = \frac{n}{v} + \frac{n-1}{r}$$

oder, wenn für  $v$  der obige Werth gesetzt wird

$$\frac{1}{x} = \frac{n-1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r} = (n-1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{a},$$

woraus, wenn  $a = \infty$ , demnach  $x$  die Brennweite  $f$  wird, folgt

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}.$$

Jeder Sonnenstrahl besteht aus einem System verschieden langer und schneller Vibrationen, welche, durch prismatische Brechung zerlegt, die Farbendispersion des Lichtes erscheinen lassen. Man findet die mittlere Länge der rothen Lichtwellen zu 0,00065, orange 0,00056, gelb 0,00055, grün 0,00050, blau 0,00046, indigo 0,00043, violet 0,00039 Millimet., wonach selbst für die längsten und langsamsten — rothen — Lichtwellen jedes Aethertheilchen in der Sekunde 420 Billionen Schwingungen macht. Bewirkt in der Farbenzerstreuung der Unterschied in den Geschwindigkeiten der Vibrationselemente im Prisma eine Zerlegung des Strahles in die Regenbogenfarben, so liegt in den Phänomenen der Doppelbrechung und Polarisation eine andere Zerlegung des Lichtes vor. Wenn nämlich auch sämtliche Elementarschwingungen zur Strahlenachse senkrecht laufen, so bleibt doch für ihre Neigungen unter sich eine Fülle von Möglichkeiten offen, von denen wir nur diejenige hervorheben, dass bei horizontaler Strahlenrichtung von vorn nach hinten, eine Abtheilung der Vibrationen dazu senkrecht, aber horizontal von rechts nach links, die andre auch dazu senkrecht, aber vertikal von oben nach unten, verlaufen kann. Diese Schwingungselemente werden in gewissen Stoffen, z. B. Kalkspatrhomboëdern getrennt, und so zwei Strahlen aus einem hergestellt. Es kann aber auch sein, dass unter gewissen experimentell zu konstatirenden Bedingungen das eine System von Vibrationen zum Verschwinden gebracht und nur ein, jetzt als polarisirt angesehenes, Strahl weitergelassen wird, in welchem alle Elementarschwingungen einander parallel laufen. Hierbei, sowie unter Mitbetheiligung der im Wesen unter den Wellen-



bewegungen erklärten Interferenz und Beugungsphänomene werden elementare Farbenzerlegungen hervorgebracht, welche unter dem Namen der Farben dünner Plättchen bekannt sind.

3. Obschon wahrscheinlich alle Vibrationen des Lichtäther zugleich Träger von Wärme sind, so erweisen sich doch namentlich jene Schwingungen zur Erregung der letzteren geeignet, welche in der prismatischen Brechung jenseits des rothen Spektrumendes fallen, so dass gewissermaassen Licht, welches wegen zu grosser Länge und Langsamkeit der Aetherwellen unsichtbar geworden, in Wärme umgesetzt und als solche empfunden wird. Die Fortpflanzung der an der Quelle erregten Wärmeschwingungen geschieht entweder so, dass die Schwingung eines Aetherpunktes, nachdem sie sich den benachbarten Partien mitgetheilt hat, den Punkt selbst in vollkommener Ruhe zurücklässt — strahlende Wärmeverbreitung —, oder dass die Schwingungen der dem ursprünglich erregten Punkt näheren Atome die Schwingungen der entfernteren um eine Grösse übertreffen, welche mit der Entfernung von der Vibrationsquelle abnimmt, aber erst so spät Null wird, dass nach und neben der Erregung fernerer Schwingungen die näheren immer noch fortdauern. Hierbei wäre denkbar, dass der länger andauernde Bewegungszustand des Aether sich auf die wägbaren Moleküle der Körper selbst übertrüge — leitende Wärmeverbreitung. — Jedenfalls deutet die chemische Einwirkung der Wärme und des Lichtes darauf, dass die kalorischen und selbst die optischen Aetherschwingungen auf die Materie übertragbar sind, oder doch die Molekularattraktionen derselben modificiren. — Die lebendige Kraft der innerhalb eines Körpers schwingenden Aetherpunkte gibt dessen Temperatur. Jede Veränderung der lebendigen Kraft bedingt beziehungsweise Erwärmung oder Erkältung; auch sind die Erscheinungen des Gebundenwerdens und Freiwerdens der Wärme an Zu- und Abnahme der Vibrationsintensität geknüpft. Man kann aber auch annehmen, dass in der freien Wärme die Temperaturunterschiede der Differenz der lebendigen Kräfte der Aetherschwingungen proportional sind, während die gebundene Wärme ein Ausdruck für die zwischen den Atomen bestehende Spannkraft ist, welche bei Aenderung des molekularen Gleichgewichtes zu Aethervibrationen, als Träger der entsprechenden freien Wärme, ausgelöst werden. Zurückwerfung, Brechung, Polarisirung, Interferenz der Wärme sind in einer den gleichnamigen Lichterscheinungen völlig analogen Weise nachgewiesen, ja sogar die thermochrotischen Phänomene als Analogien zur optischen Farbenzerlegung aufgefasst worden. — Das objektive Kennzeichen der Wärme besteht darin, dass die abstossende Molekularkraft bis zu einer messbaren Umfangvermehrung der



Körper gesteigert wird. Bei regulärem Gefüge ist die Ausdehnung nach allen Richtungen gleichförmig, bei Krystallen der irregulären Systeme ergeben sich dagegen nach den verschiedenen Achsenrichtungen differente Elastizitätsverhältnisse, auf welche in solchen Fällen immer auch ein eigenthümliches optisches Verhalten zurückweist. Die Zahl, welche ausdrückt, um den wie vielen Theil die Längeneinheit eines Körpers bei Erwärmung um  $1^{\circ}\text{C}$ . sich ausdehnt, heisst Ausdehnungscoëfficient der Länge. Die körperliche Ausdehnung finden Dulong und Petit, indem sie das Volum eines Glasgefässes mittels Quecksilber bestimmen, ebenso das eines zu prüfenden abgewogenen Metallstückes und zwar bei verschiedenen Temperaturen. Kopp verbesserte die Methode.

Bedeutet  $W$  das Gewicht eines ein bekanntes Gefäss füllenden Wasservolums bei der Temperatur  $t^0$ ,  $P$  das Gewicht des zu untersuchenden Körpers,  $S$  das Gewicht vom Inhalt des Fläschchens, wenn der Körper in das Wasser gelegt ist, so beträgt das Gewicht des von erstrem verdrängten Wassers  $P + W - S$ , also die Dichte des Körpers bei  $t^0$

$D = \frac{P}{P + W - S}$  und bei der Wassertemperatur  $0^0$ , wenn das Wasser von  $0^0$  bis  $t^0$  sich vom Umfang 1 in den Raum  $V$  ausdehnt,  $\frac{D}{V}$ . Aehnlich ist die Dichte  $D$ , bei  $t,^0$  Wasserwärme =

$\frac{P}{P + W, - S,}$  und auf  $0^0$  reduzirt  $\frac{D,}{V,}$ . Die Volumina beider Fälle  $U$  und  $U,$  stehen zu den Dichten in verkehrtem Verhältniss  $U : U, = \frac{D,}{V,} : \frac{D}{V}$ , woraus  $U \frac{D}{V} \cdot \frac{V,}{D,} = U,$   $\frac{D}{V} \cdot \frac{V,}{D,} = \frac{U}{U,}$   $= \frac{U,}{U} - 1$ , oder  $\frac{U, - U}{U} = \frac{D}{V} \cdot \frac{V,}{D,} - 1$  der Quotient  $\frac{U, - U}{U}$  ist das Ausdehnungsverhältniss von  $t^0$  bis  $t,^0$ , wonach für

$1^0$  Temperaturzunahme die körperliche Ausdehnung durch die Formel  $\left( \frac{D}{V} \cdot \frac{V,}{D,} - 1 \right) \frac{1}{t, - t} = \left( \frac{P}{(P + W - S) V} \cdot \frac{V, (P + W, - S,)}{P} - 1 \right) \cdot \frac{1}{t, - t} = \left( \frac{V,}{V} \cdot \frac{P + W, - S,}{P + W - S} - 1 \right) \frac{1}{t, - t}$  gemessen wird. Für die Stoffe:

Eisen ist die Längenausdehnung: — die Körperaudehnung:

|        |            |          |
|--------|------------|----------|
|        | 0,00001167 | 0,000037 |
| Kupfer | 0,00001717 | 0,000051 |
| Blei   | 0,00002848 | 0,000089 |







d in den Cylinder b steigen und hier den Kolben c von unten nach oben pressen. Ist derselbe am oberen Ende des Cylinders angekommen, so wird unter Schliessung von d und Oeffnung von f aus e kaltes Wasser eingespritzt, in dessen Folge der Dampf unter dem Kolben sich verdichtet, ein luftverdünnter Raum entsteht, und der Kolben vermöge seines Gewichtes herabsinkt. Da der kondensirte Dampf durch die Röhre und das Klappenventil g abgeleitet wird, so kann auf diese Weise längere Zeit hindurch eine auf- und abgehende Bewegung des Kolbens c unterhalten werden, welche mittelst der Vorrichtung hkl beliebig verwendbar gemacht wird.

4. Die Beziehungen, welche zwischen Bewegung, Wärme Elektrizität und Chemismus bestehen, die Ableitung der magnetischen Kraftäusserungen von elektrischen Erregungszuständen, die Hervorlockung des Magnetismus im violetten, blauen und grünen Theil des Sonnenspektrums, welche bei konzentrirtem Licht am besten gelingt und bei theilweiser Bedeckung der zu magnetisirenden Nadel polarisch modificirt wird, die Drehung der Schwingungsebene des polarisirten Lichtstrahles durch Magnetismus, die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektrizität und des Erdmagnetismus von der Vertheilung und den Veränderungen der Wärme deuten unter Anderm darauf hin, dass auch die elektrischen und magnetischen Erscheinungen den Aethervibrationen und molekularen Bewegungen nicht unvermittelbar gegenüberstehen, wie denn überhaupt die fortschreitende Wissenschaft das Vielfache und Vereinzelte immer inniger verknüpft, und durch die Fülle der Erscheinungen hindurch zur Einheit der Naturkräfte strebt.

### Beispiele.

1. Welche Vereinigungsweite haben die Strahlen, welche aus einem 60 Zoll entfernten Punkt auf einen Hohlspiegel von zwölfzölliger Brennweite fallen?

$$e = \frac{60 \cdot 12}{60 - 12} = 15''.$$

2. Wie gross ist die Bildweite eines leuchtenden Punktes, welcher 400 Zoll von einer Konvexlinse mit 20 Zoll Brennweite entfernt ist?

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{20} - \frac{1}{400} \quad 400 = 20x - x$$

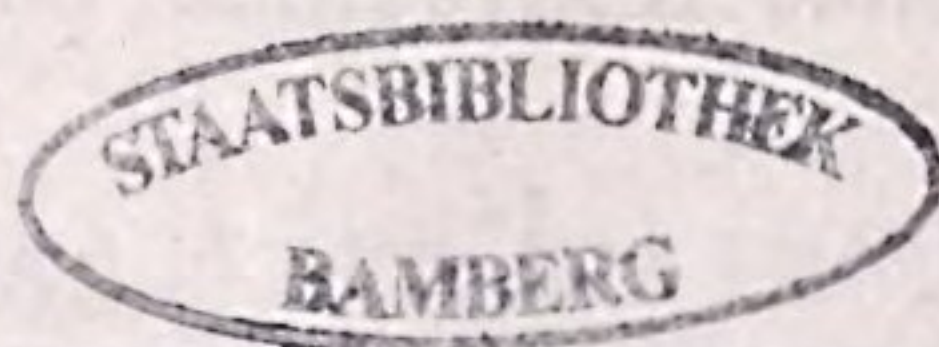
$$x = 21,053''.$$



3. Wie viel Graden der Reaumur'schen und Celsius'schen Thermometereintheilung entsprechen 93,7° Fahrenheit?

$$R = \frac{4}{9} (93,7 - 32) = 27,42^{\circ}$$

$$C = \frac{5}{4} \cdot 27,2 = 34,275^{\circ}.$$





Bei Otto Wigand, Verlagsbuchhändler in Leipzig, ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

# Physikalisches Lexikon. Encyclopädie

der

Physik und ihrer Hilfswissenschaften: der Technologie, Chemie, Meteorologie, Geographie, Geologie, Astronomie, Physiologie &c. nach dem Grade ihrer Verwandtschaft mit der Physik.

Zweite,

in Verbindung mit mehreren Gelehrten unter Benutzung der neuesten Schriften des In- und Auslandes neu bearbeitete, mit Angabe der Literatur und der Quellen bereicherte, mit mehreren Tausend in den Text gedruckten Abbildungen von Apparaten, Instrumenten und Maschinen ausgestattete und zahlreiche Tabellen enthaltende Auflage.

Begonnen von

Prof. Dr. Oswald Marbach.

Fortgesetzt von

Dr. C. S. Cornelius,

Docent an der Universität Halle.

gr. 8. 1849—1859. 6 Bände. Preis 39 Thlr.

---

## Die Chemie

des

## praktischen Lebens.

Populäre Darstellung

der Lehren der Chemie in ihrer Anwendung auf die Gewerbe, die Land- und Hauswirthschaft, so wie auf die Vorgänge im menschlichen Körper, nebst einer Anleitung zur Anstellung der einfachsten chemischen Versuche.

Von W. Baer.

gr. 8. 1859 und 1860. 2 Bände. Erster Band. 54 Bg. stark. Mit 217 Abbildungen. Preis 2 Thlr. 15 Ngr. Zweiter Band 65 Bg. stark. Mit 171 Abbildungen. Preis 4 Thlr.

---



Die  
**physikalische Geographie**

faßlich dargestellt  
für Studirende und Freunde der Naturwissenschaften

von

**Dr. W. C. Wittwer.**

Zweite Ausgabe.

gr. 8. 1858. Preis 2 Thlr. 10 Ngr.

---

**Die Physik**

faßlich dargestellt

nach ihrem neuesten Standpunkte.

Zum Gebrauch

für

höhere Unterrichtsanstalten, Studirende und Freunde der  
Naturwissenschaften

von

**Dr. Benjamin Wischel.**

Mit 361 Holzschnitten und 2 lithographirten Tafeln Abbildungen.

Zweite Ausgabe.

gr. 8. 1858. Preis 2 Thlr. 10 Ngr.

---

**Der Mensch in der Geschichte.**

Zur Begründung einer psychologischen Weltanschauung  
von **Adolf Bastian.**

3 Bände. gr. 8. Broschirt 9 Thlr.

I. Band: Die Psychologie als Naturwissenschaft.

II. Band: Psychologie und Mythologie.

III. Band: Politische Psychologie.

---







# physikalisch

für Studierende und

Dr.

gr. 8. 185



nach ihren

höhere Unterr

Mit 361 Hol

gr.

**Der Me**  
Zur Begründ

- I. Ba
- II. Ba
- III.

Dr. Otto Wigand, Verlagsbuchhändler in Berlin.

# Physikalisch

ausgeführt von

## Experimen

Gymnasien und höh

Dr. August Hug

Mit 61 in den Text eing

gr. 8. 1860.

Leitfaden

zu der

## physikalischen

für

Gymnasien, Realschulen und höh

von

Dr. A. H. Emsmann

Mit 61 in den Text eingedruckte

gr. 8. 1860. 6 N

## Physikalische A

nebst ihrer Auflösung

ne Sammlung zum Geb

auf

im Unterrichtsau

und

Dr. A. H. Emsmann

Professor zu Stettin.

Mit drei Figurentafeln.

gr. 8. 1852.

gr.



Experimental Physics

By J. D. Johnston

Published by the McGraw-Hill Book Company

Copyright 1914

Printed in the United States of America



Bei **Otto Wigand**, Verlagsbuchhändler in Leipzig, ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

**Physikalische Vorschule**  
ein  
ausgeführter vorbereitender Cursus  
der  
**Experimental-Physik**

für  
Gymnasien und höhere Bürgerschulen  
von

**Dr. August Hugo Emsmann.**

Mit 61 in den Text eingedruckten Figuren.

gr. 8. 1860. 20 Ngr.

**Leitfaden**  
zu der  
**physikalischen Vorschule**

für  
Gymnasien, Realschulen und höhere Bürgerschulen

von  
**Dr. A. H. Emsmann.**

Mit 61 in den Text eingedruckten Figuren.

gr. 8. 1860. 6 Ngr.

**Physikalische Aufgaben**

nebst ihrer Auflösung.

Eine Sammlung zum Gebrauche

auf  
höheren Unterrichtsanstalten

und  
beim Selbstunterricht.

Von  
**Dr. A. H. Emsmann**

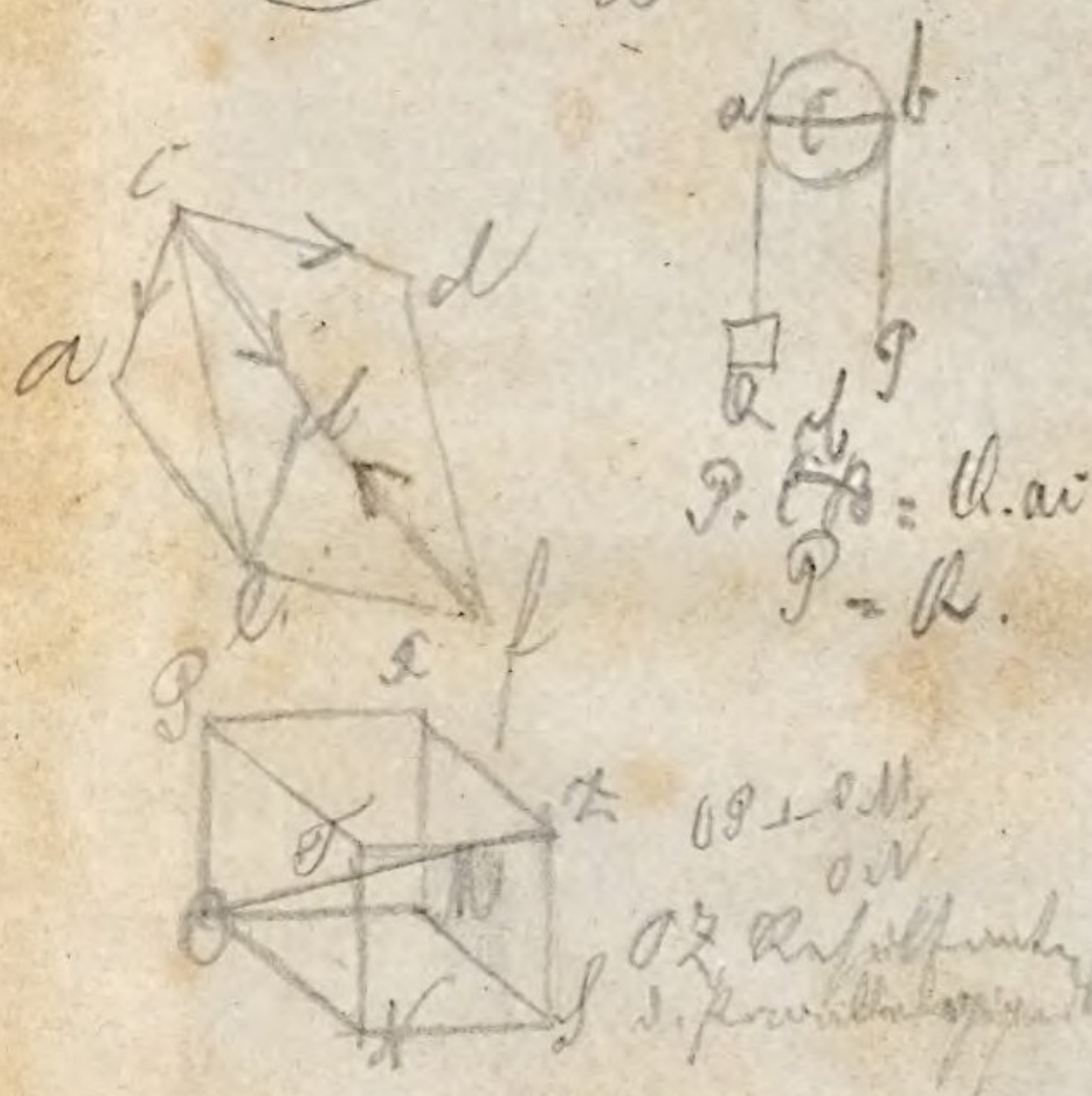
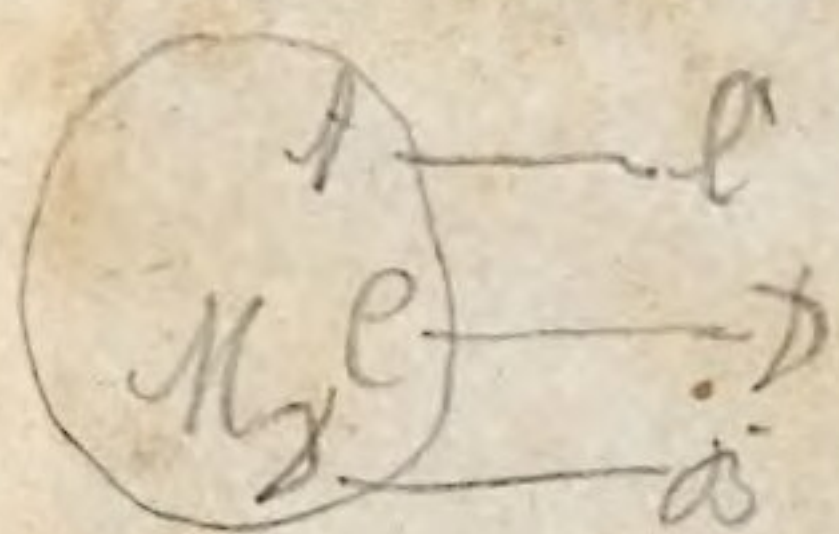
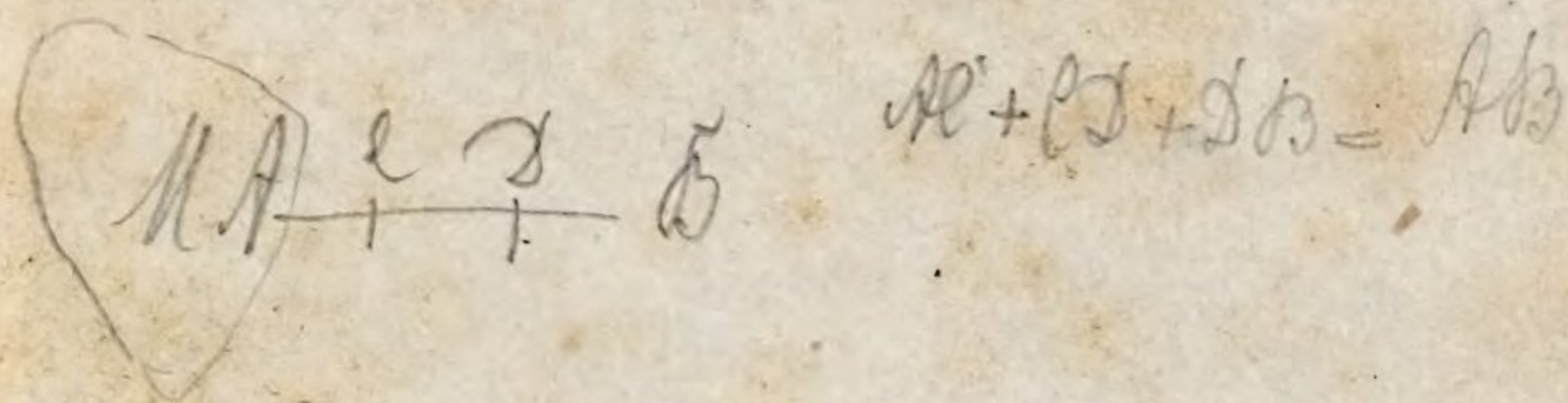
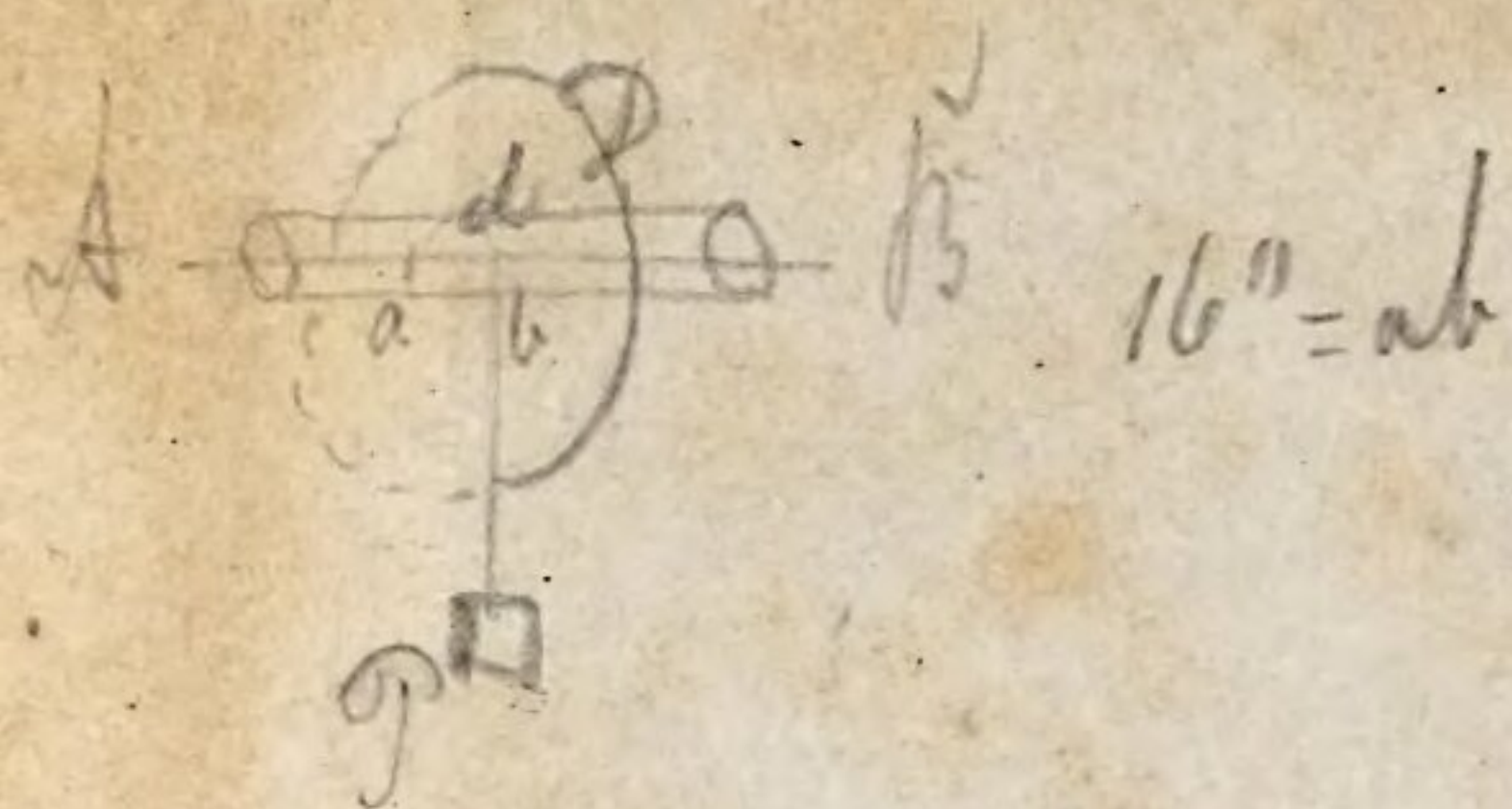
Professor zu Stettin.

Mit drei Figurentafeln.

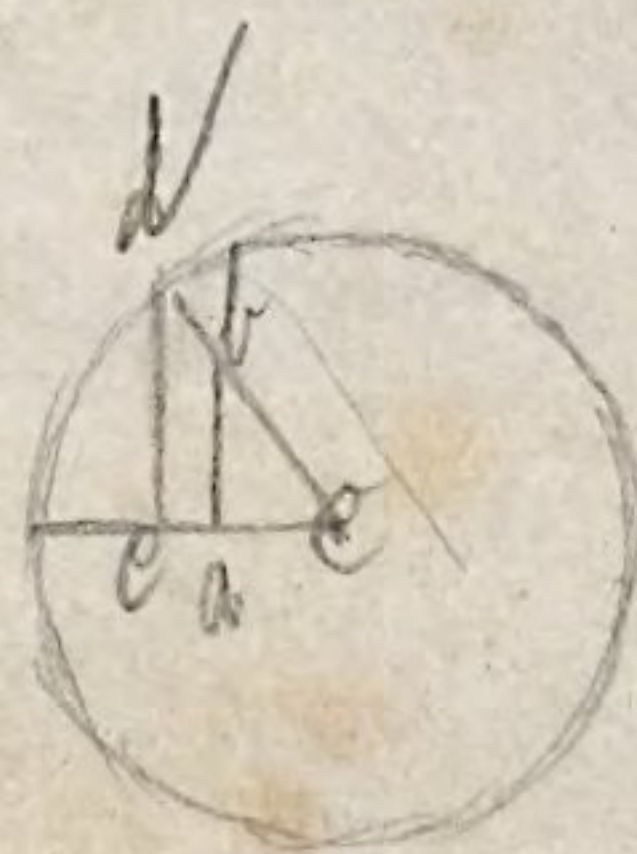
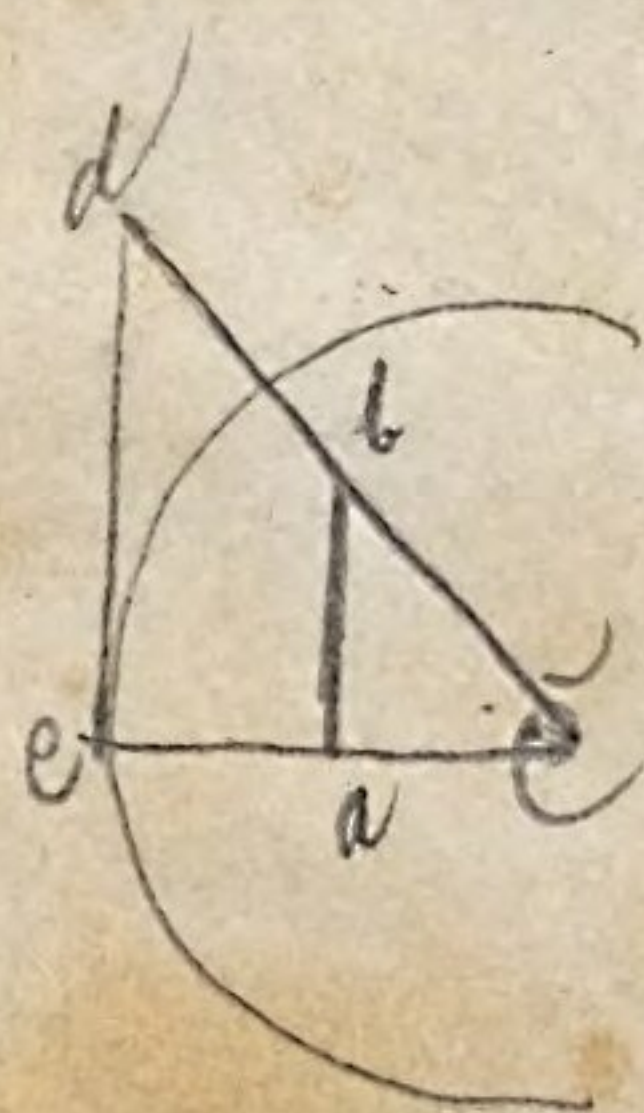
gr. 8. 1852. Preis 22 $\frac{1}{2}$  Ngr.







$$ac:br = cd:ec = i:sec x$$



$$ac:br = cd:ec = cof x:i$$







Hoh, Theodor,

Elemente der physikalischen Mechanik für Gymnasien

Leipzig 1861

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB Q 23

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421487-8